- Problèmes sur l'intégration -

Exercice n°1 :

La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_0^1 (1 + t^n)\,dt$

1) Prouver que la suite (I_n) est décroissante.
2) Est-elle convergente ?

Exercice n°2 :

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$

1) Démontrer que $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n}$
2) La suite (I_n) est-elle convergente ?

Exercice n°3 :

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$

1) Démontrer que $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n}$
2) La suite (I_n) est-elle convergente ?

Exercice n°4 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \int_0^n f(t)\,dt$

1) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2) Prouver que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \frac{n-1}{2}$. La suite (u_n) converge t-elle ?

   (*Indication* : on montrera que : $\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \geqslant \frac{x}{n+1}$)

Exercice n°5 :

N^{lle} Calédonie mars 2012

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = xe^x$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Sur la courbe $\mathscr{C}_f$, tracée ci-après, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe $\mathscr{C}$. On a placé les points $\mathrm{A}'(a\,;\,0)$ et $\mathrm{B}'(1\,;\,0)$.
Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée en annexe est minimale.

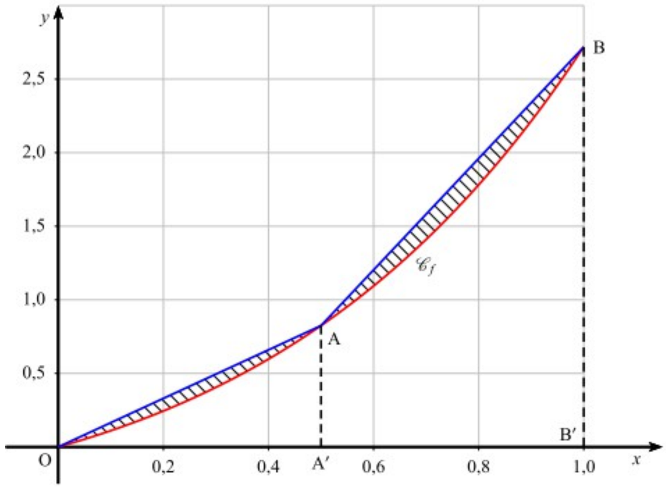
Partie A :

1) Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;1]$ par $F(x) = (x-1)e^x$ est une primitive de f sur $[0\,;1]$. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = 1$.
2) a) Donner l'aire du triangle OAA′ et montrer que l'aire du trapèze ABB′A′ est égale à $\dfrac{1}{2}\left(-a^2e^a + ae^a - ae + e\right)$.
   b) En déduire que l' aire de la partie du plan hachurée est égale à $\dfrac{1}{2}\left(ae^a - ae + e - 2\right)$.

Partie B :

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x\,(e^x - e) + e - 2$

1) Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer g'' pour tout réel x de $[0; +\infty[$.
   Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0; +\infty[$ par : $g''(x) = (2 + x)e^x$.
2) En déduire les variations de la fonction g' sur $[0; +\infty[$.
3) Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; +\infty[$.
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4) En déduire les variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$.
5) En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a.



Exercice n°6 : Asie juin 2014

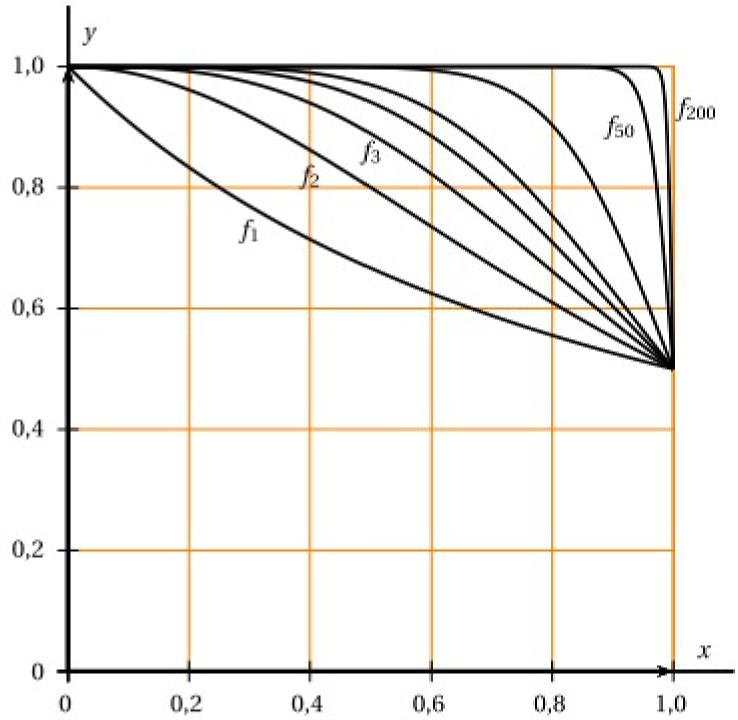
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.
   En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.



2. Calculer la valeur exacte de I_1.
3. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1.$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_n \leqslant 1$.
4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^n\right)\mathrm{d}x$.
6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.
7. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n, p et k sont des entiers naturels x et I sont des réels
Initialisation :	I prend la valeur 0

Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 1$
	Demander un entier $p \geqslant 1$
	Pour k allant de 0 à $p-1$ faire :
	    x prend la valeur $\dfrac{k}{p}$
	    I prend la valeur $I + \dfrac{1}{1+x^n} \times \dfrac{1}{p}$
	Fin Pour
	Afficher I

a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$? On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.*

Exercice n°7 :

Soit x un réel positif. On pose $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

1. a. Montrer que pour tout réel x positif, $\frac{\mathrm{e}^x}{x+1} \geqslant 1$.
   b. En déduire que $f(2) \geqslant 1$.
2. a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   b. En déduire qu'il existe un réel c appartenant à $[1\ ;\ 2]$ tel que $f(c) = 1$.
   c. Calculer $f'(x)$. En déduire que f est croissante.
   d. Démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant x - 1$.
   En déduire la limite de f quand x tend vers $+\infty$.