- Exercices sur la géométrie analytique -

Exercice n°1 :

1) On donne les points $A(1;-1;2)$, $B(0;5;3)$, $C(4;-19;-1)$. Ces points sont-il alignés ?
2) On donne les points $A(3;2;2)$, $B(-1;-4;4)$, $C(1;0;1)$ et $D(3;3;1)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elle parallèles ?
3) La droite d est dirigée par $\vec{u}(2;-1;3)$ et la droite d' est dirigée par $\vec{v}(-4;2;-6)$. Quel théorème vous permet d'affirmer que ces deux droites sont parallèles ?

Exercice n°2 :

On donne les points $A(3;0;4)$, $B(2;3;1)$, $C(-1;2;3)$ et $D(0;-1;6)$.

a) Justifier que ces quatre points sont coplanaires.
b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Exercice n°3 :

On donne les points $A(0;1;3)$, $B(\sqrt{2};0;2)$ et $C(\sqrt{2};2;2)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice n°4 :

On donne les points $A(5;1;3)$, $B(5;-3;-1)$, $C(1;1;-1)$ et $D(1;-3;3)$. Démontrer que le teraèdre ABCD est régulier c'est à dire que toutes ses faces sont des triangles équilatéraux.

Exercice n°5 :

On donne les points $A(2;3;-1)$, $B(2;8;-1)$, $C(7;3;-1)$ et $D(2;-1;2)$. Démontrer que les points B, C et D sont sur une même sphère de centre A.

Exercice n°6 :

Plan médiateur de [AB] : plan dont les points sont équidistants de A et de B. Il est ainsi perpendiculaire au segment [AB] en son milieu

On donne les points $A(5;2;-1)$ et $B(3;-1;1)$. Indiquer parmi les points suivants ceux qui appartiennent au plan médiateur de [AB] :

- $C(-2;5;2)$
- $D(1;1;3)$
- $E(3;2;1)$

Exercice n°7 :

La droite Δ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

1) a) Déterminer le point I de Δ de paramètre 0.

b) Déterminer un vecteur $\vec{u}$ directeur de Δ.

c) Justifier qu'il existe un point de Δ d'abscisse 5.

2) La droite Δ passe-t-elle par le point $A\left(-10; \frac{16}{3}; -\frac{14}{3}\right)$

Exercice n°8 :

On donne les droites d et d' de représentations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 6 - 3s \\ y = -7 + 2s \\ z = -1 + s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -3 \\ z = -5 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Démontrer que ces droites sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice n°9 : Dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On donne les points A(2; 1; 0), B(0; 1; 1) et C(0; 3; 2).

a) Démontrer que les points A, B et C ne ont pas alignés.

b) Vérifier que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires.

c) La droite passant par O dirigée par $\vec{k}$ coupe le plan (ABC) au point I. Calculer les coordonnées de I.

Exercice n°10 :

1) Démontrer que les trois points $A(-1; 2; 5)$; $B(1; 0; -2)$ et $C(0; 2; -3)$ définissent un plan.

2) Déterminer une représentation paramétrique de ce plan

3) a) Prouver que les plans (ABC) et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ne sont pas parallèles.

b) En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ intersection de ces deux plans.

Exercice n°11 :

L'espace est rapporté à un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On note d_1 la droite passant par les points A(1; −2; −1) et B(3; −5; −2).

1) Démontrer qu'une représentation paramétrique de d_1 est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

2) d_2 est la droite de repésentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 - s \\ y = -1 + 2s \\ z = -s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$

   Démontrer que d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires.

3) On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point C(0; −3; 0) et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1; -4; 0)$ et $\vec{v}(0; -5; 1)$
   a) Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ contient la droite d_1.
   b) Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite d_2 se coupent en un point D dont on déterminera les coordonnées.

Exercice n°12 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne les points suivants : $A(2;-1;3)$, $B(4;3;-2)$, $C(-2;-3;1)$ et $D(9;9;-6)$.

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2) Déterminer, s'ils existent, les nombres a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.
   Que peut-on en conclure ?

3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).

Exercice n°13 :

On donne des représentations paramétriques de (d) : $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$ et (d') : $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -3 + t \\ z = -7 + 3t \end{cases}$.

1) Les droites (d) et (d') sont-elles coplanaires ?

2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (d) avec le plan (xOz).

Exercice n°14 :

Amérique du Nord juin 2014 - Section d'un cube par un plan

On considère un cube ABCDEFCH donné ci-après.

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1) Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L
2) On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   a) Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   b) Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3) En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2) Déterminer les coordonnées du point L.
3) On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{5}{8}\right)$.
   Le triangle TPN est-il rectangle en T ?