# Fiche d'exercices sur l'étude des suites.

**Exercice n°1** : Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+1}=u_n+4$.

1) Conjecturer un majorant ou un minorant avec la calculatrice.
2) Démontrer par récurrence que la suite est minorée par $2$.
3) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}(2-u_n)$.
4) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$.

**Exercice n°2** : Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_0=1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}=\sqrt{2+v_n}$.

1) Essayer de déterminer le sens de variation de $(v_n)$. Est-ce facile ?
2) Démontrer que : $0<v_n<2$ pour tout entier $n$. Pourrait-on faire mieux ?
3) Démonter que $(v_n)$ est croissante maintenant !

**Exercice n°3** : Comme l'exercice n°1, en explorant les possibilités.

Soit $(w_n)$ la suite définie par la relation de récurrence suivante : $5w_{n+1}-3w_n-6=0$.
On cherche à déterminer le sens de variation de cette suite.

1) En utilisant la définition :
Exprimer $w_{n+1}-w_n$ en fonction de $w_n-3$.
Peut-on déterminer le signe de $w_{n+1}-w_n$ ? Que faudrait-il connaître pour répondre ?

2) En observant sur un graphique :
Tracer les droites d'équation $y-x=0$ et $5y-3x-6=0$. (Expliquez...)
Représenter le nuage de points de la suite en prenant $u_0=1$. Observations, conjectures...
Représenter le nuage de points de la suite en prenant $u_0=6$. Observations, conjectures...

3) On choisit maintenant $u_0=5$.
Démontrer, en suivant la méthode de l'exercice n°1, que la suite $(w_n)$ est décroissante.

4) Est-il certain que cette suite admette une limite ?

**Exercice n°4** :

1) Donner un exemple de suite croissante et non majorée. Quelle peut être sa limite ?
2) Donner un exemple de suite croissante et majorée. Cette suite admet-elle une limite ?
   Est-elle minorée ?
3) Donner un exemple de suite bornée et alternée (qui change de signe à chaque terme).
   Cette suite admet-elle une limite ?

**Exercice n°5** : Soit $(w_n)$ la suite définie par $w_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ , $w_{n+1}=0,5w_n-4$ .

1) Représenter les premiers termes de la suite sur un graphique.
2) Conjecturer un minorant ainsi que le sens de variation de la suite $(w_n)$ .
3) Démontrer que $(w_n)$ est décroissante.
4) Que peut-on en conclure à votre avis ? La suite $(w_n)$ est-elle bornée ?
5) Qu'en serait-il si $w_0$ valait $70!$ (factoriel de 70 !)

**Exercice n°6** : On considère la fonction $f$ définie par : $f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}$ .

1) En classe : étude des variations de $f$ , forme canonique et asymptotes, allure de la courbe, points remarquables et points fixes.
2) Soit $(t_n)$ la suite définie par $t_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ $t_{n+1}=f(t_n)$ .
   a) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ , $t_n>2$ .
   b) Faire un graphique (sur un intervalle proche de $[-0,5;5]$ ).
   c) Quel est le signe de $f(x)-x$ sur $]1;+\infty[$ ? En déduire le sens de variation de $(t_n)$ .
   d) La suite $(t_n)$ admet-elle une limite ?
   e) Que se passerait-t-il avec $t_0\in[1;2]$ ? Et avec $t_0<1$ ?

**Exercice n°7** : Soit $(u_n)$ définie par $u_{n+1}=u_n+n$ pour tout $n$ et $u_0=1$ .

Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ , on a : $u_n=1+\dfrac{n(n-1)}{2}$ .

**Exercice n°8** : But de l'exercice : on ne connaît pas l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ .
On cherche à l'aide des premiers termes à établir une conjecture quant à l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ . On démontre ensuite cette conjecture.

La suite $(u_n)$ est définie par : son premier terme $u_1=0$ et la relation $u_{n+1}=\dfrac{1}{2-u_n}$ .

a) Calculer $u_2$ , $u_3$ , $u_4$ et $u_5$ .
b) Que peut-on faire comme conjecture sur l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ ?
c) Démontrer cette conjecture par récurrence et donner la valeur exacte de $u_{2017}$ .

**Exercice n°9** : Un exemple de suite définie par une relation de récurrence à deux termes.

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $u_{n+2}=4u_{n+1}-3u_n$

$u_0=0$ et $u_1=1$ (il faut donc les **deux** premières valeurs!)

Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ , $u_n=\dfrac{3^n-1}{2}$ .

# Exemples de suites récurrentes

## Exercice n°1 :

**Deux méthodes pour trouver la limite d'une suite**

La suite $(u_n)$ est définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

**Partie A : première méthode**

1) a) Démontrer par récurrence que pour tout $n$, $0 \leqslant u_n < 1$

b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - u_n^2}{u_n + 2}$ puis montrer que la suite $(u_n)$ est alors croissante.

2) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente vers une limite $\ell$

3) On admet que cette limite $\ell$ vérifie $f(\ell) = \ell$ avec $f$ définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$

a) Déterminer la valeur de $\ell$

b) Proposer un algorithme pour déterminer la valeur de $N$ tel que : $\forall n > N$, $|u_n - \ell| < 10^{-3}$.
Entrer cet algorithme sur votre calculatrice puis déterminer $N$.

**Partie B : deuxième méthode**

1) La suite $(v_n)$ est définie pour tout entier $n$ par : $\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$
Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

2) Exprimer $v_n$, puis $u_n$ en fonction de $n$.

3) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et donner sa limite.

## Exercice n°2 :

Soit la suite numérique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \end{cases}$

1) a) Calculer $u_1, u_2, u_3$ et $u_4$. On pourra en donner des valeurs approchées à $10^{-2}$ près.

b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel $n$ : $u_n \leqslant n + 3$

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n + 3 - u_n)$

c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

3) On désigne par $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

4) Pour tout $n$ non nul, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $T_n = \dfrac{S_n}{n^2}$.

a) Exprimer $S_n$ en fonction de $n$.

b) Déterminer la limite de la suite $(T_n)$.