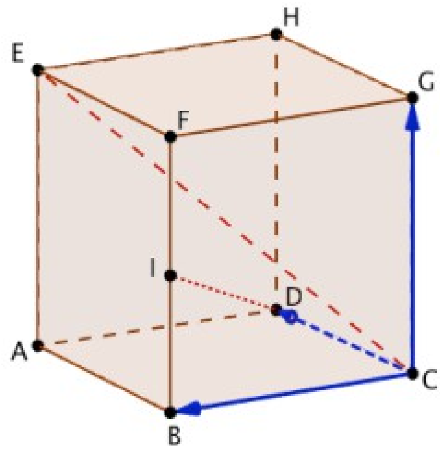
- Exercices sur le produit scalaire -

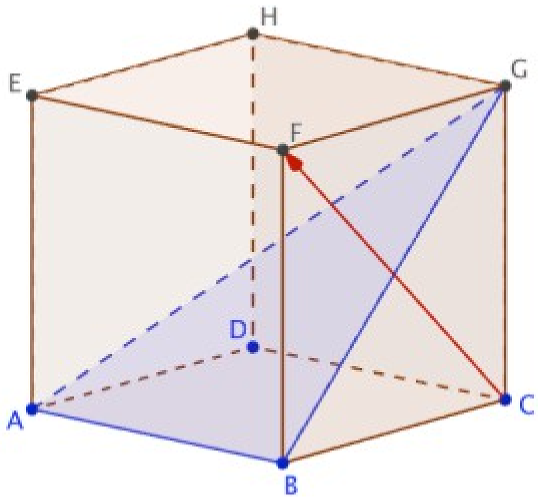
Les méthodes essentielles

Exercice n°1 :



Dans le cube ABCDEFGH le point I est le milieu de l'arête $[FB]$.
Dans ce cube, les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice n°2 :



Dans le cube ABCDEFG, montrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG).

Exercice n°3 :

On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives : $(1;\ \sqrt{3};0)$ et $(0;\ \sqrt{3};1)$.

1) Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$
2) Quelle est, à un degré près, la mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Exercice n°4 :

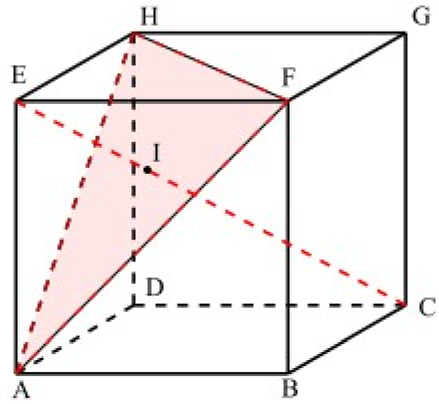
ABCDEFGH est un cube d'arête a. O est le centre de la face EFGH et I le milieu du segment [CG].

1) Faire une figure.
2) Calculer en fonction de a
   a) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CG}$
   b) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{GI}$

Exercice n°5 :

On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur a (a réel strictement positif).
Soit I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1) Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :
$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AF}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}, \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF}$$
2) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux.
On admettra de même que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux.



3) En déduire que le point I est le projeté orthogonal de E sur le plan (AFH).
4) a) Justifier les résultats suivants : les droites (AF) et (EH) sont orthogonales, ainsi que les droites (AF) et (EI).
b) En déduire que la droite (AF) est orthogonales la droite (HI).
c) Établir de même que la droite (AH) est orthogonale à la droite (FI).
5) Que représenté le point I pour le triangle AFH ?

Exercice n°6 : On donne $A(1,2,-2)$, $B(-1,3,1)$ et $C(2,0,-2)$.

Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice n°7 : Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $M(-1,2,1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice n°8 :

Déterminer, dans chaque cas, une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par les points A et de vecteur normal $\vec{n}$.

a) $A(2; 0; 1)$ et $\vec{n}(1; -1; 3)$

b) $A(\sqrt{2}; -2; 5)$ et $\vec{n}(2; -3; -1)$

Exercice n°9 :

Déterminer, dans chaque cas, une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ perpendiculaire en A à (AB).

a) $A(2; 0; -1)$ et $B(0; 1; 3)$.

b) $A(\sqrt{2}; -2; 5)$ et $B(-1; 3; 2)$

Exercice n°10 : On considère le plan (P) d'équation $2x - y + 3z - 2 = 0$, et les points $A(1,2,-3)$ et $B(-1,2,0)$.

1) Démontrer que la droite (AB) et le plan (P) sont sécants.

2) Déterminer leur point d'intersection.

Exercice n°11 :

Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x - 3y + 2z - 5 = 0$ et le point A a pour coordonnées $(2; 3; -1)$. Est-il vrai que le point $H(3; 0; 1)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$

Exercice n°12 : On considère les deux plans suivants :

$$(P) : -x + 2y + z - 5 = 0 \text{ et } (P') : 2x - y + 3z - 1 = 0 .$$

1) Démontrer que les plans (P) et (P') sont sécants.

2) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

Exercice n°13 :

On donne les points $A(1; -1; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(2; 1; 3)$, $D(4; -6; 2)$ et $E(6; -7; -1)$.

1) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{DE}$.

2) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$

Exercice n°14 : On considère les deux plans suivants :

$$(P) : 2x + 4y + 4z - 3 = 0 \text{ et } (P') : 2x - 5y + 4z - 1 = 0 .$$

Démontrer que les plans (P) et (P') sont orthogonaux.

Exercice n°15 :

Le plan $\mathscr{P}$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = -2 - t + s \\ z = 2t - s \end{cases} \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$

Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

Exercice n°16 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On donne les points suivants : $A(3,-2,2)$, $B(6,1,5)$ et $C(6,-2,-1)$.

Partie A :

1) Démontrer, à l'aide du produit scalaire, que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :
$$x + y + z - 3 = 0$$
Prouver que $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3) Soit $\mathscr{P}'$ le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}'$.
4) Déterminer un vecteur directeur de la droite Δ intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Partie B :

1) Soit D le point de coordonnées $(0; 4; -1)$. Prouvez que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2) Calculer le volume du tétraèdre ABCD
3) Prouver que l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.
4) a) Calculer l'aire du triangle BDC.
   b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).