Exercices sur les probabilités conditionnelles et l'indépendance d'événements

Exercice n°1 :

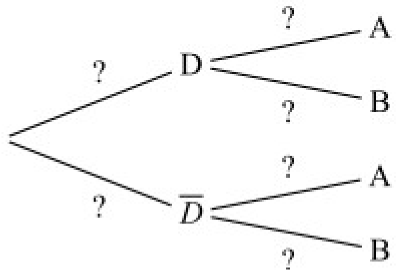
Deux ateliers A et B fabriquent des puces électroniques. Pour une commande de 2 000 pièces, A en a produit 60% et B en a produit 40%. L'atelier A produit 4% de puces défectueuses et B en produit 3%. On prend une puce au hasard dans la commande. On appelle A l'événement « la puce provient de l'atelier A », B l'événement « elle provient de l'atelier B » et D l'événement « elle est défectueuse ».

1) Compléter la tableau suivant qui décrit la composition de la commande :

	nombre de puces défectueuses	nombre de puces non défectueuses	total
nombre de puces produit par A			
nombre de puces produit par B			
total			

2) Calculer les probabilités suivantes :
   a) $p(\text{D})$, $p(\text{A} \cap \text{D})$ et $p_{\text{D}}(\text{A})$
   b) $p(\overline{\text{D}})$, $p(\overline{\text{D}} \cap \text{B})$ et $p_{\overline{\text{D}}}(\text{B})$

c) Remplir l'arbre suivant :



Exercice n°2 :

1) A et B sont tels que $p(\text{A}) = \frac{1}{2}$, $p(\text{B}) = \frac{1}{4}$ et $p(\text{A} \cap \text{B}) = \frac{1}{10}$
   Calculer $p_{\text{A}}(\text{B})$ et $p_{\text{B}}(\text{A})$.

2) A et B sont tels que $p(\text{A}) = \frac{1}{2}$, $p(\text{B}) = \frac{1}{3}$ et $p(\text{A} \cup \text{B}) = \frac{2}{3}$
   Calculer $p(\text{A} \cap \text{B})$, $p_{\text{A}}(\text{B})$ et $p_{\text{B}}(\text{A})$.

3) A et B sont tels que $p(\text{A}) = \frac{1}{3}$, $p_{\text{A}}(\text{B}) = \frac{1}{4}$ et $p_{\overline{\text{A}}}(\text{B}) = \frac{1}{2}$
   Calculer $p(\text{B})$.

4) A et B sont tels que $p(\text{A}) = \frac{1}{2}$, $p(\text{B}) = \frac{3}{4}$ et $p(\text{A} \cap \text{B}) = \frac{2}{5}$
   a) $p_{\text{A}}(\text{B})$ et $p_{\text{B}}(\text{A})$
   b) Calculer $p(\overline{\text{A}} \cap \overline{\text{B}})$. En déduire $p_{\overline{\text{A}}}(\overline{\text{B}})$.

Exercice n°3 :

À la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :

- 65% de la population concernée est contre la construction de ce barrage et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes ;
- parmi les personnes non opposées à la construction, 20% sont des écologistes.

On interroge une personne au hasard.

1) Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.
2) Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage et soit écologiste.
3) Calculer la probabilité qu'une personne interrogée ne soit pas opposée et soit écologiste.
4) En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.

Exercice n°4 :

Un tiroir T_1 contient cinq pièces d'or et cinq pièces d'argent, un tiroir T_2 en contient quatre d'or et six d'argent. On choisit au hasard l'un des tiroirs et dans ce tiroir, on prend une pièce au hasard.

1) Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2) Calculer la probabilité de prendre une pièce d'or
   - du tiroir T_1 ;
   - du tiroir T_2.
3) Calculez la probabilité de prendre une pièce d'or.
4) On a extrait une pièce d'or. Quelle est alors la probabilité qu'elle provienne du tiroir T_1 ? Pouvait-on le prévoir ?

Exercice n°5 :

Le personnel d'un hôpital est réparti en trois catégories : M (médecins), S (soignants non médecins) et AT (personnel administratif ou technique).

- 12% sont des médecins et 71% des soignants.
- 67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

On interroge au hasard un membre du personnel

1) Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.
2) Quelle est la probabilité que la personne interrogée soit une femme soignante ? une femme médecin ?
3) On sait que 80% du personnel est féminin.
   - Calculer la probabilité que la personne interrogée soit une femme AT.
   - En déduire la probabilité que la personne interrogée soit une femme sachant que cette personne interrogée est AT.

Exercice n°6 :

Un lot de cent dés contient vingt dés pipés. Pour un tel dé, la probabilité d'apparition du 6 est égale à $\frac{1}{2}$. Les autres dés sont parfaits.

1) On prend au hasard un dé, on le lance. Calculer la probabilité de l'événement S «on obtient 6 ».
2) On prend au hasard un dé, on le lance, on obtient 6. Calculer la probabilité que le dé soit pipé.

Exercice n°7 :

Le quart de la population d'un pays a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte $\frac{1}{12}$ de malades. Parmi les malades, $\frac{1}{5}$ n'est pas vacciné.

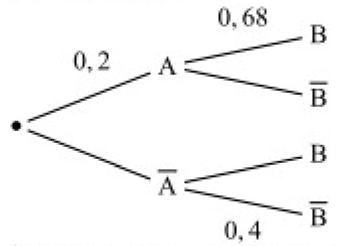
1) Calculer :
   a) la probabilité qu'une personne malade soit vacciné ;
   b) la probabilité qu'une personne soit vaccinée et malade ;
   c) la probabilité qu'une personne soit malade.
2) En déduire la probabilité qu'une personne non-vaccinée tombe malade. Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice n°8 :

Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
On appelle A l'événement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'événement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
On suppose que les événements A et F sont indépendants.
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à $0,02$ et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à $0,069$.
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

Exercice n°9 :

On considère l'arbre de probabilités suivant :



Affirmation : la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est égale à 0,32.
Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? On se justifiera

Exercice n°10 :

Un dé cubique truqué est tel que la probabilité de sortie d'un numéro k est proportionnelle à k. On lance ce dé et on considère les événements :

- A « le numéro est pair » ;
- B « le numéro est supérieur ou égal à 3 » ;
- C « le numéro obtenu est 3 ou 4 »

a) Calculez les probabilités de A, B, C.
b) Calculez la probabilité conditionnelle $p_A(B)$.
c) A et B sont-ils indépendants ? A et C ?

Exercice n°11 : Pertinence d'un test de dépistage.

Un laboratoire souhaite commercialiser un test de dépistage pour une maladie auto-immune à la demande des autorités.
Le cahier des charges impose les conditions suivantes :

- La probabilité que le test soit positif sachant qu'un individu est malade doit être de 99%.
- La probabilité que le test soit négatif sachant qu'un individu n'est pas malade doit être de 99%.
- La probabilité qu'un individu soit malade sachant que le test est positif doit être d'au moins 95%.

On choisit un individu au hasard dans la population, et on note :
- M l'événement « l'individu est malade » ;
- T l'événement « le test est positif ».

1) On suppose dans cette question que 10% de la population est malade.

a) Réaliser l'arbre de probabilité traduisant cette situation.

b) Ce test pourra-t-il être commercialisé par le laboratoire ?

2) On suppose maintenant que 20% de la population est malade.

a) Réaliser l'arbre de probabilité traduisant cette nouvelle situation.

b) Ce test pourra-t-il être désormais commercialisé par le laboratoire ?

3) Dans cette question, on cherche à partir de quelle proportion d'individus malades ce test répondra au cahier des charges, et pourra donc être utilisé.

Pour cela, on note $P(M)=x$ la proportion recherchée.

a) Réaliser l'arbre de probabilité correspondant.

b) Montrer que la probabilité qu'un individu soit malade sachant que son test est positif est donnée par l'expression : $\dfrac{99x}{98x+1}$.

c) En déduire la valeur de x répondant au cahier des charges. Conclure.

Exercice n°12 :

L'entreprise Éclairage vend des ampoules à deux magasins de bricolage : Atelier et Bricolo. Cette entreprise propose trois types d'ampoules : les ampoules fluocompactes qui représentent $15\,\%$ du stock, les ampoules halogènes qui représentent $25\,\%$ du stock et les ampoules à LED qui représentent le reste du stock.
On sait que :

- $40\,\%$ des ampoules fluocompactes sont achetées par le magasin Atelier ;
- $20\,\%$ des ampoules halogènes sont achetées par le magasin Bricolo ;
- $56\,\%$ des ampoules sont achetées par le magasin Bricolo.

On prélève au hasard une ampoule provenant du stock de l'entreprise Éclairage.
On considère les événements suivants :

F : « l'ampoule est une ampoule fluocompacte » ;
H : « l'ampoule est une ampoule halogène » ;
L : « l'ampoule est une ampoule à LED » ;
A : « l'ampoule est achetée par le magasin Atelier » ;
B : « l'ampoule est achetée par le magasin Bricolo ».

Description des données de l'énoncé :

Traduire toutes les données à l'aide de l'écriture avec les notations des probabilités.

Ainsi que ce que l'on peut en déduire directement.

Calculs de base :

Calculer la probabilité que l'ampoule soit achetée par le magasin Bricolo sachant que c'est une LED.
Puis compléter l'arbre.

Inversion de l'arbre :

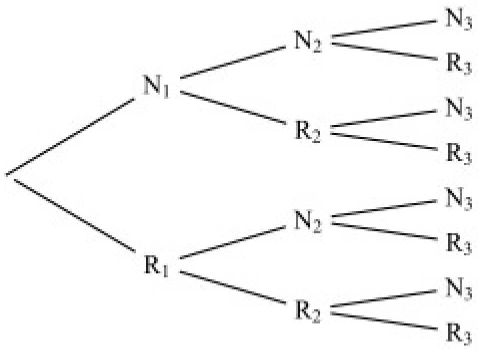
Inverser l'arbre de probabilité et compléter-le.

Exercice n°13 :

Réunion juin 2005

On considère trois urnes U_1, U_2, et U_3.
L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.
Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.
Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'événement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2) a) Calculer la probabilité des événements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$, et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.
   b) En déduire la probabilité de l'événement $N_1 \cap N_3$.
   c) Calculer de façon analogue la probabilité de l'événement $R_1 \cap N_3$.

3) Déduire de la question précédente que $p(N_3 = \dfrac{2}{5}$.

4) Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

5) Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice n°14 :

Polynésie juin 2006

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Retards le 2ᵉ mois \ Retards le 1ᵉʳ mois	0	1	2 ou plus	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1 000

1) On choisit au hasard un individu de cette population.
   a) Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois,
   b) Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.
2) On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul). On fait les hypothèses suivantes :
   - si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,46.
   - si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,66.
   - si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est encore 0,66.

   On note A_n, l'événement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n », B_n, l'événement « l'individu a eu exactement un retard le mois n », C_n, l'événement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ». Les probabilités des événements A_n, B_n, C_n sont notées respectivement p_n, q_n et r_n.

   a) Pour le premier mois ($n = 1$), les probabilités p_1, q_1 et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités p_1, q_1 et r_1.
   b) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n, et r_n. On pourra s'aider d'un arbre.
   c) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0,2p_n + 0,66$.
   d) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0,55$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
   e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice n°15 : Métropole juin 2017

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :
S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

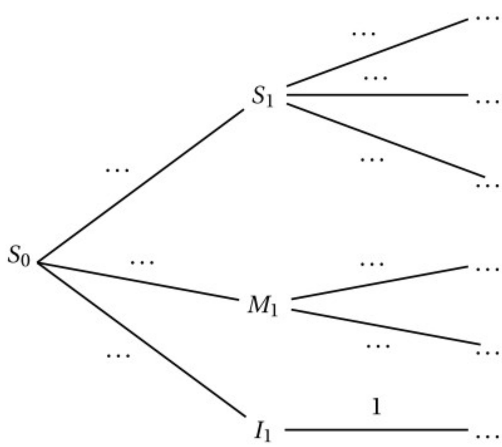
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 \; ; \; P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2) = 0{,}2025$.

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,850 0	0,050 0	0,100 0
4	2	0,722 5	0,075 0	0,202 5
5	3	0,614 1	0,084 9	0,301 0
6	4	0,522 0	0,085 9	0,392 1
7	5	0,443 7	0,081 9	0,474 4
8	6	0,377 1	0,075 4	0,547 4
...	...	...	...	...
20	18	0,053 6	0,013 3	0,933 0
21	19	0,045 6	0,011 3	0,943 1
22	20	0,038 8	0,009 6	0,951 6

*Pour répondre aux questions **a.** et **b.** suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.*

a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n)?

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.

Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

3. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.

En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle?*

Exercice n°16 : Liban mai 2003

Commun à tous les candidats

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.

2. On considère les évènements suivants :
B_n : « On tire une boule blanche lors du n-ième tirage »,
U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».

a. Calculer la probabilité de l'évènement B_n.

b. Exprimer la probabilité de l'évènement U_n en fonction de n.

c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité :

$$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

b. Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice n°17 : Pondichéry avril 2003

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = a, \text{ et, pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n\,(2 - u_n)$$

où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Dans un repère orthonormal (unité graphique 8 cm), tracer, sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, la droite (d) d'équation $y = x$ et la courbe (Γ) représentative de la fonction : $f\ : x \mapsto x(2 - x)$.

c. Utiliser (d) et (Γ) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3.

2. On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle $]0\,;\,1[$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Que peut-on en déduire ?

3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$. On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 1 - u_n.$$

a. Exprimer, pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de v_n.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).