# Exercices sur les nombres complexes

## Exercice 1

1) D est le point de coordonnées ( $\sqrt{3}$; 3). Quel est son affixe ?
2) On donne les points A, B, C d'affixes respectives :
$$z_A = \sqrt{3} + i\,, \quad z_B = -\sqrt{3} - i\,, \quad z_C = 2i$$
Calculer le module et un argument pour ces trois affixes. Que peut-on déduire pour les points A, B et C.
3) Placer les points A, B, C et D à la règle et au compas.
4) Quelle est la nature du quadrilatère AOCD. Pourquoi ?
5) Quel est l'affixe du point E tel que ODEB soit un parallélogramme ?

## Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des point $M$ dont l'affixe $z$ vérifie l'égalité proposée.

1) $|z| = 3$
2) $\mathrm{Re}(z) = -2$
3) $\mathrm{Im}(z) = 1$

**Opération dans $\mathbb{C}$**

## Exercice 3

Donner la forme algébrique des complexes suivant :

1) $z = 3 + 2i - 1 + 3i$
2) $z = 6 + i - (2 + 4i)$
3) $z = 12 - 3i - 4 - 5 + 8i$
4) $z = (1 + 2i)(4 + 3i)$
5) $z = (3 - i)(2 + 7i)$
6) $z = (1 + i)^2$
7) $z = (3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})$
8) $z = (2 - 5i)^2$
9) $z = (1 + i)(2 - 3i)(1 + i)$
10) $z = (2 + i)^2(1 - 2i)$

## Exercice 4

Donner la forme algébrique des complexes suivants en rendant réel le dénominateur :

1) $z = \dfrac{1}{1 - i}$
2) $z = \dfrac{1}{2 - i\sqrt{3}}$
3) $z = \dfrac{1}{4 - 3i}$
4) $z = \dfrac{4 - 6i}{3 + 2i}$
5) $z = \dfrac{5 + 15i}{1 + 2i}$
6) $z = \dfrac{1 + 2i}{1 - 2i}$
7) $z = \dfrac{3 - 6i}{3 + i} + \dfrac{4}{3 - i}$
8) $z = \left(\dfrac{4 - 6i}{2 - 3i}\right)\left(\dfrac{1 + 3i}{3 + 2i}\right)$

**Résolution d'équation du 1er degré dans $\mathbb{C}$**

## Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. Donner la solution sous forme algébrique.

1) $(1+i)z = 3 - i$

2) $2z + 1 - i = iz + 2$

3) $(2z + 1 - i)(iz + 3) = 0$

4) $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$

5) $(iz + 1)(z + 3i)(z - 1 + 4i) = 0$

## Exercice 6

Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^2$ :

1) $\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} z - z' = i \\ iz + z' = 1 \end{cases}$

**Complexe conjugué**

## Exercice 7

Donner la forme algébrique du conjugué $\overline{z}$ des complexes suivants : z

1) $z = 3 - 4i$

2) $z = \dfrac{1}{i-1}$

3) $z = \dfrac{3-i}{1+i}$

4) $z = \dfrac{2i+1}{i+2} + \dfrac{1-2i}{2-i}$

## Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue $z$ suivantes :

1) $2\overline{z} = i - 1$

2) $(2z + 1 - i)(i\,\overline{z} + i - 2) = 0$

3) $\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = i$

## Exercice 9

Soit $z = x + iy$ avec $x$ et $y$ réels ; on note $Z$ le nombre complexe : $Z = z - 2\overline{z} + 2$.

1) Calculer en fonction de $x$ et $y$ la partie réelle et la partie imaginaire de $Z$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z = 0$ d'inconnue $z$.

## Exercice 10

Soit $z = x + iy$ avec $x$ et $y$ réels.
À tout complexe $z$, on associe $Z = 2\,\overline{z} - 2 + 6i$.

1) Calculer en fonction de $x$ et de $y$, les parties réelle et imaginaire de $Z$.

2) Existe-t-il des complexes $z$ tels que $Z = z$ ?

## Exercice 11

Dans le plan complexe, $M$ est point d'affixe $z = x + iy$, $x$ et $y$ réels. À tout complexe $z$, $z \neq 1$, on associe : $z' = \dfrac{5z-2}{z-1}$

1) Exprimer $z' + \overline{z'}$ en fonction de $z$ et $\overline{z}$.
2) Démontrer que « $z'$ est un imaginaire pur » est équivaut à « $M$ est un point d'un cercle privé d'un point ».

## Exercice 12

Pour tout complexe $z$ différent de $i$, on pose : $z' = \dfrac{iz-1}{z-i}$. Prouver que :

$$z' \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 1$$

**Vrai-Faux**

## Exercice 13

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple.

1) Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.
2) Si $z + \dfrac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.
3) Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

**Équations du second degré**

## Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{C}$, chacune des équations suivantes.

1) $2z^2 - 6z + 5 = 0$
2) $z^2 - 5z + 9 = 0$
3) $z^2 - 2z + 3 = 0$
4) $z^2 = z + 1$
5) $z^2 + 3 = 0$
6) $z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$

## Exercice 15

$\theta$ est un réel donné

1) Résoudre l'équation $(E)$ : $z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$
2) Dans le plan complexe $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, A et B sont les point ayant pour affixe les solutions de l'équation $(E)$. Quelles sont les valeurs de $\theta$ pour lesquelles le triangle OAB est équilatéral ?

## Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant : $\begin{cases} z_1 z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$

## Exercice 17

Trouver le complexe $p$ et $q$ tels que l'équation : $z^2 + pz + q = 0$ admette pour solutions les nombres : $1 + 2i$ et $3 - 5i$

## Exercice 18

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$

2) $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$

**Polynômes de degré supérieur**

## Exercice 19

On pose pour tout complexe $z$ : $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$

1) Vérifier que : $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$

## Exercice 20

1) Montrer que $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$ puis en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^3 - 1 = 0$.
2) On désigne par $j$ le complexe : $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   - Calculer $j^2$, $j^3$, $j^{2\,006}$
   - Calculer $S = 1 + j + j^2 + \cdots + j^{2\,006}$

## Exercice 21

On considère le polynôme : $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

1) Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que : $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$
2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z) = 0$

## Exercice 22

Pour tout complexe $z$, on considère : $f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$

1) $b$ est réel. Exprimer en fonction de $b$ les parties réelle et imaginaires de $f(ib)$.
2) En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.
3) Démontrer qu'il existe deux nombres réels $\alpha$ et $\beta$ que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe $z$,

$$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

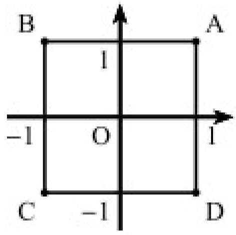
4) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$

# Nombres complexes : formes trigonométrique et exponentielles

## Exercice 24

Dans le repère orthonormal direct,on a représenté le carré ABCD ci-contre.

Donner l'affixe et un argument de chacun des sommets du carré ABCD




## Exercice 25

À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée en degré à $10^{-2}$ près d'un argument de chacun des nombres complexes suivants :

1) $z = 4 - 3i$ 2) $z = 1 + 2i$ 3) $z = -2 + i$

## Exercice 26

Trouver une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

1) $z = (1 - i)^2$ 2) $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$ 3) $z = \dfrac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^{12}}$

## Exercice 27

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

1) Donner le module et un argument de $z_1$, $z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$

2) Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$

3) En déduire que : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

**Forme exponentielle**

## Exercice 28

Donner une forme exponentielle de chacun des complexes suivants :

1) $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$ 2) $z_2 = (1 + i\sqrt{3})^4$ 3) $z_3 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$

## Exercice 29

Dans chacun des cas suivants, écrire $z$ sous la forme exponentielle et en déduire la forme algébrique de $\overline{z}$ et $\dfrac{1}{z}$.

1) $z_1 = \dfrac{6}{1 + i}$ 2) $z_2 = 3i\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ 3) $z_3 = -12e^{i\frac{\pi}{4}}$

## Exercice 30

Déterminer et construire les ensembles $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ et $\Gamma_3$ des points dont l'affixe $z$ vérifie la condition proposée.

1) $z = 3e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0; 2\pi[$
2) $z = r\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $r \in [0; +\infty[$
3) $z = k\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

## Exercice 31

A et B ont pour affixes respectives 1 et $3 + 2i$.
Déterminer puis construire les ensembles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$, ensemble des points M dont l'affixe $z$ satisfait les conditions suivantes :

1) $|z - 1| = |z - (3 + 2i)|$

2) $|z - (3 + 2i)| = 1$

## Exercice 32

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On appelle $f$ l'application, qui, à tout nombre complexe $z$ différent de $-2i$, associe

$$Z = f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}.$$

1) On pose $z = x+iy$, avec $x$ et $y$ deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $Z$ en fonction de $x$ et de $y$.

   On vérifiera que $\operatorname{Re}(Z) = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2}$ et $\operatorname{Im}(Z) = \dfrac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y + 2)^2}$.

   ⚠ soyez patient et méthodique !

2) En déduire la nature de :
   a) l'ensemble $E$ des points $M$ d'affixe $z$, tels que $Z$ soit un réel ;
   b) l'ensemble $F$ des points $M$ d'affixe $z$ du plan, tels que $Z$ soit un imaginaire pur éventuellement nul.
   c) Représenter ces deux ensembles.

**Exercice** :

1) Donner l'écriture algébrique du complexe $z_1 = \dfrac{1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{-i\frac{\pi}{3}}}$.

   On pourra multiplier numérateur et dénominateur par $e^{i\frac{\pi}{6}}$ puis utiliser les formules d'Euler permettant de définir le sinus et le cosinus avec les exponentielles complexes.

2) En déduire l'écriture algébrique du complexe $z_2 = \dfrac{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

3) Donner l'écriture algébrique du complexe $z_3 = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

## Exercice 33

**La Réunion juin 2010**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère le point A d'affixe $1 + i$.

On associe, à tout point M du plan d'affixe $z \neq 0$, le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z - 1 - i}{z}$

Le point M' est appelé le point image du point M.

1) a) Déterminer, l'affixe du point B′, image du point B d'affixe $i$.
   b) Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe $z$ non nulle, l'affixe $z'$ du point M' est telle que $z' \neq 1$.
2) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe $z$ non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.
3) Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe $z$ non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel ?

**Triangle**

## Exercice 34

On donne les points A, B et C d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$

$$a = 1 + \frac{3}{4}i \quad b = 2 - \frac{5}{4}i \quad c = 3 + \frac{7}{4}i$$

1) Placer les points A, B et C.
2) Quelle est la nature du triangle ABC ?
3) Calculer l'affixe de A' tel que ABA'C soit un carré.

## Exercice 35

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2 + 2i$, $b = -3 - 6i$ et $c = 1$.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

## Exercice 36

Les points A, B, C, D ont pour affixes respectives

$$a = 2 - 2i, \quad b = -1 + 7i, \quad c = 4 + 2i, \quad d = -4 - 2i$$

1) $\Omega$ est le point d'affixe $\omega = -1 + 2i$
   Prouver que A, B, C, D appartiennent au cercle de centre $\Omega$ et de rayon 5.
2) On note $e$ l'affixe du milieu E de [AB].
   Calculez $e$ puis prouver que $\dfrac{a - e}{d - e} = \dfrac{c - e}{a - e}$
   La droite (EA) est une droite remarquable du triangle DEC ; préciser laquelle.

## Exercice 1 :

1) $z_D = \sqrt{3} + 3i$

2) $|z_A| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ et $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \arg(z_A) = \dfrac{\pi}{6}(2\pi)$

$|z_B| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$ et $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \arg(z_B) = -\dfrac{5\pi}{6}(2\pi)$

$|z_C| = 2$ sans calculs et $\arg(z_C) = \dfrac{\pi}{2}(2\pi)$ également sans calculs (imaginaire pur)

Comme on obtient $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$, alors $OA = OB = OC$,
ce qui montre que les points A, B et C sont tous sur le cercle de centre O et de rayon 2.

3) On trace le cercle $(C)$, on place le point $C$ ;
on trace la droite $(d_1)$ pour obtenir $A$ ;
on trace la droite $(d_2)$ pour obtenir $B$.

Pour construire $D$, on peut déjà tracer la droite $(d_3)$ ;
puis il nous faudrait un angle par exemple :

Après calculs j'obtiens $|z_D| = 2\sqrt{3}$ et $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ donc $\arg(z_D) = \dfrac{\pi}{3}(2\pi)$ (sinus inutile !).

Donc on trace la droite $(d_4)$ pour obtenir le point $I$ et donc l'angle de $\dfrac{\pi}{3}$ avec la droite $(OI)$.
Ce qui permet d'obtenir le point $D$, intersection avec la droite $(d_3)$.

4) AOCD est un losange, car il a 4 côtés égaux.

En effet, $AD = 2$ et $DC^2 = \sqrt{3}^2 + 1^2 = 4$ sur la figure. Donc $OA = OC = DA = DC = 2$.

5) Le point $E$ n'est autre que le point $C$, car ODCB est un parallélogramme car :

$DC = OC = OB$ et $BC^2 = \sqrt{3}^2 + 3^2 = 12 = OD^2$

donc ses côtés opposés sont de même longueurs...