- Exercices sur la loi normale -

La loi normale centrée réduite.

Exercice n°1 :

Un variable aléatoire T suit la loi normale centrée réduite.

1) Calculer :

a) $P(T < 1,8)$
b) $P(T < -1,8)$
c) $P(T > 2,58)$
d) $P(-1,21 < T < 1,44)$

2) Calculer le nombre réel u tel que :

a) $P(T < u) = 0,14$ b) $P(T > u) = 0,25$ c) $P(0 < T < u) = 0,4$

Exercice n° 2 :

Un variable aléatoire T suit la loi normale centrée réduite. Dans chaque cas, déterminer l'arrondi au millième du nombre u tel que :

a) $P(-u < T < u) = 0,915$ b) $P(-u < T < u) = 0,732$

a) $P(-u<T<u)=0,915$ équivaut à $P(T<u)=?$ (tail=left avec Casio)

$P(-u<T<u)=1-P(T<-u)-P(T>u)=1-2P(T>u)=1-2(1-P(T<u))=2P(T<u)-1=0,915$

donc $P(T<u)=\dfrac{1,915}{2}=0,9575$ par inversion loi normale calculatrice on obtient $u \approx 1,72$

Exercice n° 3 :

Lors d'un concours, la moyenne des notes est 8.
T est la variable aléatoire qui donne l'écart $t-8$ où t est la note obtenue par le candidat.
T suit la loi normale centrée réduite.

1) À combien faut-il fixer la note d'admission de ce concours pour que 60 % des candidats soient reçu ? Donner l'arrondi au centième.
2) Dans quel intervalle de notes se trouvent 80 % des candidats.

T = note – moyenne = t – 8, variable aléatoire suivant la loi $N(0,1)$.

1) On cherche u tel que $P(T>u) \geqslant 0,6$, ce qui équivaut à $P(T<u)=0,4$ qui donne $u \approx -0,25$.

Donc la note d'admission doit être fixée à $7,75$.

2) Ici, on cherche u tel que $P(-u<T<u)=0,8$ et on trouve $u=1,2816\ldots \approx 1,3$.

Donc l'intervalle des notes est $[6,7;9,3]$.

Exercice n° 4 :

La température T relevée en janvier, en milieu de journée, suit une loi normale centrée réduite.

1) Interpréter dans ce contexte, la valeur 0 de l'espérance de T.
2) Justifier que dans plus de 95 % des cas, la température relevée est entre -2°C et +2°C.
3) Quelle est la fourchette de températures dans laquelle on trouve les températures relevées dans 99 % des cas ?

4) Donner une estimation de la probabilité d'avoir un jour de janvier, une température supérieure à +2°C, puis vérifier à la calculatrice.

1) 0 est la Temp moyenne, donc $E(T)=0$.

2) On calcule $P(-2<T<2)=0,9544$ donc bon.

3) On cherche u tel que $P(-u<T<u)=0,99$; on obtient $u\approx 2,6$ donc $T\in[-2,6;2,6]$.

4) $P(\mu-2\sigma<T<\mu+2\sigma)=P(-2<T<2)=0,954$ d'après le cours.

Et $P(-2<T<2)=0,954$ donne $P(T>2)=\dfrac{1-0,954}{2}=0,023$ (symétrie de la densité)

Exercice n° 5 :

Étude de la fonction φ

φ désigne la fonction de Laplace-Gauss.

1) a) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = -x\varphi(x) \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = (x^2-1)\varphi(x)$$

b) En déduire les variations de φ et de φ'.

2) On appelle $\mathscr{C}_\varphi$ la courbe de Gauss et I et J les points d'abscisses respectifs -1 et 1.

a) Déterminer les équations des tangentes, T_i et T_j, à $\mathscr{C}_\varphi$ aux points I et J.

b) On appelle les points I et J des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_\varphi$. Qu'on de particulier les tangentes T_i et T_j ?

3) Tracer la courbe $\mathscr{C}_\varphi$ ainsi que les tangentes T_i et T_j. On prendra comme unité : 2 cm sur les abscisses et 10 cm sur les ordonnées.

La loi normale générale.

Exercice n° 6 :

Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(-4; 7)$ Calculer à 10^{-4} les probabilités suivantes :

1) $P(-11 \leqslant X \leqslant 3)$ 2) $P(-5 < X < 0)$ 3) $P(X \leqslant -5 \text{ ou } X \geqslant 0)$

On a pris $\mu=-4$ et $\sigma=7$.

1) $P(-11<X<3)=P(X<3)-P(-11)=X0{,}84134-0{,}15866\approx 0{,}2827$

2) $P(-5<X<0)\approx 0{,}2729$

3) $P(X\leqslant -5)+P(X>0)=P(-10^{99}\leqslant X\leqslant -5)+P(0<X<10^{99})=0{,}4432+0{,}3413\approx 0{,}7845$

Exercice n° 7 :

1) La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, 0, 16)$. Déterminer μ à 10^{-2} près, pour que :
   a) $P(X < -3, 2) = 0, 05$ b) $P(X > 5, 6) = 0, 05$
2) La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(120, \sigma^2)$. Déterminer σ à 10^{-2} près, pour que :
   a) $P(X < 100) = 0, 05$ b) $P(X > 140) = 0, 05$

1) X suit $N(\mu;\sigma=0{,}16)$.

a) Je pose $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ qui suit la loi $N(0;1)$.

$X<-3{,}2$ équivaut à $Z=\frac{X-\mu}{0{,}16}<\frac{-3{,}2-\mu}{0{,}16}$ donc $P(X<-3{,}2)=P\left(Z<\frac{-3{,}2-\mu}{0{,}16}\right)=0{,}05$.

Et en inversant la loi normale centrée réduite en utilisant la calculatrice, on résoud l'équation $P(Z<a)=0{,}05$. On obtient $a=-1{,}645$.

Puis on résoud l'équation $\frac{-3{,}2-\mu}{0{,}16}=-1{,}645$, qui donne $\mu=1{,}645\times 0{,}16-3{,}2=-2{,}94$.

2) a) X suit $N(\mu=120, \sigma^2)$

Je pose $Z=\frac{X-120}{\sigma}$ qui suit la loi $N(0,1)$ et $X<100$ équivaut à $\frac{X-120}{\sigma}<-\frac{20}{\sigma}$.

Donc $P(X<100)=P\left(Z<-\frac{20}{\sigma}\right)=0{,}05$ (on cherche a tel que $P(Z<a)=0{,}05$)

En inversant la loi noramle, on obtient : $a=-1{,}645$ et donc $-\frac{20}{\sigma}=-1{,}645$ ce qui donne $\sigma=20\times1{,}645=32{,}9$.

Exercice n° 8 :

Une machine produit des clous dont la longueur moyenne est de 12 mm, avec un écart-type de 0,2 mm.
La longueur L d'un clou pris au hasard est une variable aléatoire qui suit une loi normale.
Un clou est jugé défectueux si sa longueur est supérieure à 12,5 mm ou inférieure à 11,5 mm.

1) Quelle est la proportion de clous défectueux ?
2) Pour un clou défectueux pris au hasard, quelle est la probabilité que sa longueur soit inférieure à 11,5 mm ?

Exercice n° 9 :

La durée de vie d'une ampoule électrique, en heures, d'un type donné suit une loi normale de moyenne 2 200 et d'écart-type 200.
Quelle est la probabilité qu'une telle ampoule dure :

a) moins de 2 000 heures ?
b) plus de 2 400 heures ?
c) entre 2 000 heures et 2 400 heures ?

Exercice n° 10 :

Dans un supermarché, le gérant a établi une statistique de ses ventes quotidiennes de packs d'eau minérale. Il apparaît que le nombre X de packs vendue chaque jour suit une loi normale de moyenne 52 et d'écart-type 12.

1) Le gérant ne peut pas stocker plus de 76 packs dans sa réserve. Avec un tel stocks, quelle est la probabilité qu'un jour donné, il ne puisse pas répondre à la demande ?
2) Il ne souhaite pas remplir complètement sa réserve, car cela rend la manutention difficile. Mais il voudrait limiter à 5 % le risque de rupture de stock. Quel doit être au minimum son stocks quotidien ?

Approximation normale d'une loi binomiale.

Exercice n° 11 :

On estime à 16 % la proportion de gaucher dans une population. On choisit dans cette population 900 personnes au hasard « avec remise ». Quelle est (à 10^{-2} près) la probabilité qu'il y ait dans cet échantillon :

a) au plus 140 gauchers ?

b) au moins 150 gauchers ?

Exercice n° 12 :

Un questionnaire à choix multiples, comprend 36 questions. Pour chaque question, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Un candidat très ignorant choisit une réponse au hasard à chaque question. On appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre de réponses exactes. Calculer la probabilité qu'il réponde juste à moins 5 questions.

Exercice n° 13 :

Pour un certain traitement médical, on a observé que les patients peuvent faire une réaction allergique avec une probabilité de 0,02. On prévoit de traiter 1 225 personnes.
Quelle est la probabilité qu'il y en ait au moins 30 qui fassent cette réaction allergique.

Exercice n° 14 :

La compagnie aérienne Mankpad Air estime à 0,1 la probabilité qu'un client ayant réservé sa place ne se présente pas à l'embarquement.
Sur le vol MA 2013, l'avion à une capacité de 300 places. Pour optimiser son remplissage, la compagnie a accepté plus de 300 réservations. Ce faisant, elle court le risque que se présente à l'embarquement plus de 300 personnes ayant réservé, auquel cas elle devra indemniser ceux qui ne pourront embarquer.
On note n le nombre de réservations, acceptées par la compagnie, et X la variable aléatoire indiquant le nombre de personnes ayant réservé qui se présentent à l'embarquement. On suppose les comportements des clients indépendants les uns des autres.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Justifier que cette loi binomiale peut être approchée par une loi normale dont on précisera les paramètres.

3) On suppose dans cette question que $n = 324$.
Quelle est la probabilité que la compagnie ne puisse pas embarquer tous les passagers qui se présentent ?

4) La compagnie souhaite limiter à 1 % le risque de ne pouvoir embarquer tous les passagers qui se présentent.
Déterminer le nombre maximum de places qu'elles peut proposer à la réservation.

1) X = nbre pers se présentant à l'embarquement

L'exp. consiste à répéter n fois de façon indépendante la même épreuve de Bernoulli, la pers. se présente ou non, avec une proba de succès $p=0{,}9$. Donc X suit $B(n;p=0{,}9)$.

2) On a $n\geqslant 300$, $n\times p\geqslant 300\times 0{,}9=270$ et $n\times(1-p)\geqslant 300\times 0{,}1=30$ donc cette loi binomiale peut être approchée par la loi normale de paramètres $\mu=0{,}9n$ et $\sigma=\sqrt{0{,}09n}$.

3) On cherche $P_B(X>300)\approx P_N(300<X<10^{99})$ avec $\mu=291{,}6$ et $\sigma=5{,}4$.

On obtient $0{,}0599$ donc pratiquement $6\ \%$.

4) Ici, on cherche n pour que $P_N(X>300)=0{,}01$ où maintenant X suit $N(0{,}9n;\sqrt{0{,}09n})$.

Je pose $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}=\dfrac{X-0{,}9n}{\sqrt{0{,}09n}}$, variable aléatoire qui suit la loi $N(0;1)$.

Alors $X>300$ équivalent à $Z>\dfrac{300-0{,}9n}{\sqrt{0{,}09n}}$ soit $Z>\dfrac{300-0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}$ ou encore $Z>\dfrac{1000-3n}{\sqrt{n}}$.

Donc $P_N(X>300)=P_N\left(Z>\dfrac{1000-3n}{\sqrt{n}}\right)=0{,}01$ qui équivaut à $P_N\left(Z\leqslant\dfrac{1000-3n}{\sqrt{n}}\right)=0{,}99$.

Puis on utilise la caculatrice pour inverser la loi $N(0;1)$.

On obtient $\dfrac{1000-3n}{\sqrt{n}}=2{,}3263$. Equation qui permet normalement d'obtenir n.

On doit normalement obtenir $n\in]300;324[$.

En réalité, on obtient $n\approx 319{,}47\ldots$ donc il faut prendre au maximum 319 réservations.

Exercice n° 15 :

Pondichéry avril 2013

Une entreprise emploie 220 salariés. La probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant une période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.
On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

2) On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Le tableau suivant donne les probabilités de l'événement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	$-1,55$	$-1,24$	$-0,93$	$-0,62$	$-0,31$	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'événement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

Exercice n° 16 :

Amérique du Nord mai 2013

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.
La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1) Calculer $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.

2) Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

3) Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.
Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.
On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leqslant -1,751) \simeq 0,040$.

Partie B

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1) On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de $0,913$. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

   Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0,003$.

2) Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?

3) Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

Exercice n° 17 :

Liban mai 2013

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes.
Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».
La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.
L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.
Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.
La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.
On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les événements :
E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 »
C : « Le petit pot est conforme. »

1) Construire un pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2) Calculer la probabilité de l'événement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »
3) Déterminer la probabilité de l'événement C.
4) Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement E sachant que l'événement C est réalisé.

Partie B

1) On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.
   On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.
   Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$
0,13	0,15	0,000 4
0,14	0,16	0,047 8
0,15	0,17	0,499 6
0,16	0,18	0,904 4
0,17	0,19	0,499 6
0,18	0,20	0,047 8
0,19	0,21	0,000 4

   Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.
2) On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.
   On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.
   On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à $0,99$.
   Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.
   a) Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?
   b) Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16 ; 0,18].
   c) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.
      On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,990
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993

Exercice n° 18 :

Amérique du Nord mai 2014

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 mℓ et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 mℓ.
On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 mℓ de crème.

1) Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mℓ, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.
   Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.
2) La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X, sans modifier son espérance $\mu = 50$. On veut réduire à $0,06$ la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.
   On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$
   a) Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z.
   b) Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,06$.
   c) En déduire la valeur attendue de σ'.
3) Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème.
   On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est $0,06$.
   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.
   a) On admet que Y suit une loi binomiale. En donner les paramètres.
   b) Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes.

Exercice n° 19 :

Métropole Septembre 2014

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1) Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.
   On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif. On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.
   Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.
   a) Déterminer la valeur de λ.
   b) Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

c) Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

2) Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à $0,8$.

On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

a) Préciser, en fonction de n, les paramètres de la loi de la variable aléatoire Y, son espérance mathématique $E(Y)$ et son écart-type $\sigma(Y)$.

b) Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 64,8$ et d'écart-type $\sigma = 3,6$.
Calculer la probabilité p_1 de l'événement $\{Z \leqslant 71\}$ à l'aide de la calculatrice.

c) On admet que lorsque $n = 81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(Y \leqslant 70)$ de l'événement $\{Z \leqslant 70\}$.
Le restaurant a reçu 81 réservations.
Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent ?