65 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

1. On considère l'équation $(E_1) : x^3 = 1$.

a. Trouver a, b et c tels que : $x^3 - 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

c. En déduire les solutions de (E_1) et placer les images de ces nombres dans le plan complexe.

d. Mettre les trois solutions de (E_1) sous forme exponentielle.

2. On considère l'équation $(E_2) : x^4 = 1$.

a. Factoriser $x^4 - 1$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2) et placer les images de ces nombres dans le plan complexe.

c. Mettre les quatre solutions de (E_2) sous forme exponentielle.

3. Quelles figures géométriques ont été obtenues en représentant les solutions de ces deux équations ?

4. Quelle équation permettrait d'obtenir un octogone régulier ? Et un heptagone régulier ?

Un nombre complexe x vérifiant $x^3=1$ s'appelle une racine troisième de l'unité.

Dans le cas où x est réel, on connaît bien les solutions de ce genre d'équation $x^n=1$.

$x^0=1$
$x^1=1$ donne $x=1$
$x^2=1$ donne $x=-1$ ou $x=1$
$x^3=1$ donne $x=1$
et ainsi de suite suivant la parité de l'exposant n.

1) L'équation dans $\mathbb{C}$, (E_1) : $x^3=1$ équivaut à $x^3-1=0$.

a) $x=1$ est racine du polynôme x^3-1, donc x^3-1 est factorisable par $x-1$.

$x^3-1=(x-1)(ax^2+bx+c)$ équivaut à $x^3-1=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$
qui équivaut à $1=a$ et $0=b-a$ et $0=c-b$ et $-1=-c$.

On obtient donc $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.

b) Le polynôme x^2+x+1 a pour discriminant $\Delta=-3$ négatif, donc il admet deux racines complexes conjuguées $x_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $x_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

c) Les solution de (E_1) sont donc : 1, x_1 et x_2.

d) Formes exponentielles :

$x_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ donc $|x_1|^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$ et $|x_1|=1$

Alors si j'appelle ϕ un argument de x_1, j'ai $\cos\phi=-\frac{1}{2}$ et $\sin\phi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\phi=-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Ainsi $x_1=re^{i\theta}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et donc $x_2=\overline{x_1}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2) (E_2) : $x^4=1$ dans $\mathbb{C}$.

Le polynôme complexe x^4-1 admet 1 pour racine, donc il est possible de la factoriser par $x-1$

En posant la division de x^4-1 par $x-1$ on obtient : $x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$.

Il reste à résoudre l'équation $x^3+x^2+x+1=0$, équation du troisième degré, pour lesquels nous n'avons pas d'autre méthode que de trouver une racine a, puis de factoriser le polynome par x-a

-1 est une racine évidente, donc on peut factoriser x^3+x^2+x+1 par $x+1$ en posant la division suivant les puissances croissantes, et on obtient : $x^3+x^2+x+1=(x+1)(1+x^2)$

Donc les solutions de (E_2) sont 1, -1, i et $-i$

$1=e^{0i}$ $\quad -1=e^{i\pi}$ $\quad i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\quad -i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

3) On obtient des polygônes réguliers à n côtés.

4) Pour obtenir un octogone il faut résoudre l'équation $z^8=1$.

Cas général :

Les n solutions de l'équation $x^n=1$ sont les complexes de la forme $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, pour k allant de 0 à $n-1$, appelés racines n-ièmes de l'unité.

On a alors bien $z_k{}^n=1$.

89 Histoire d'angles

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r.
On rapporte le plan au plan complexe et on le munit d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
Le point du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe r est appelé A.
Soit B un point quelconque du cercle $\mathscr{C}$ tel que :

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\varphi+2k\pi$$

avec $k\in\mathbb{Z}$.

a. Donner une écriture exponentielle de l'affixe du point B.

b. Soit M un point quelconque du cercle $\mathscr{C}$. On note son affixe $re^{i\alpha}$.
Écrire $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$ en fonction des affixes z_M, z_A et z_B des points M, A et B.

c. On note θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$.
Montrer que :

$$e^{i\theta}=\frac{e^{i\varphi}-e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}$$

d. Exprimer $e^{-i\theta}$ en fonction de $e^{i\theta}$.

e. Calculer $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}$ de deux façons pour en déduire que :

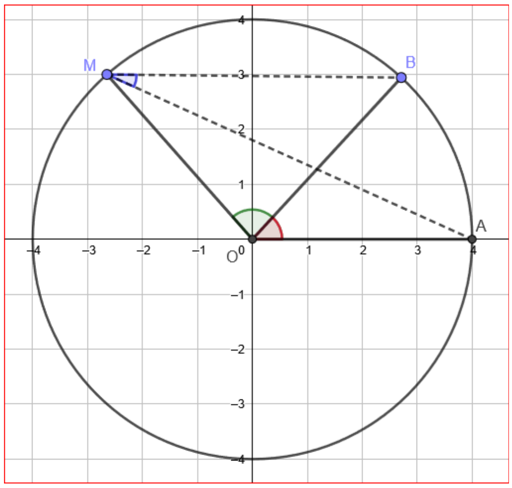
$$e^{2i\theta}=\frac{e^{i\varphi}-e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\times\frac{1-\dfrac{1}{e^{i\alpha}}}{\dfrac{1}{e^{i\varphi}}-\dfrac{1}{e^{i\alpha}}}$$

f. En déduire que $e^{2i\theta}=e^{i\varphi}$, puis que :

$$2\theta=\varphi+2k\pi$$

avec $k\in\mathbb{Z}$.

g. Quel théorème est démontré dans cet exercice ?



a) Le point B a pour affixe $z_B=re^{i(\phi+2k\pi)}=re^{i\phi}$, et le point A pour affixe $z_A=r$.

b) Soit M le point du cercle C d'affixe $z_M=re^{i\alpha}$.

L'angle $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$ est égale à l'argument du complexe $\dfrac{z_B-z_M}{z_A-z_M}$

donc $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\arg\left(\dfrac{z_B-z_M}{z_A-z_M}\right)$.

c) Soit θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$.

On a alors $\dfrac{z_B-z_M}{z_A-z_M}=k\times e^{i\theta}$ où k est le module du complexe $\dfrac{z_B-z_M}{z_A-z_M}$,

ce qui donne $e^{i\theta}=\lambda\times\dfrac{z_B-z_M}{z_A-z_M}$ soit $e^{i\theta}=\lambda\times\dfrac{re^{i\phi}-re^{i\alpha}}{r-re^{i\alpha}}$ et donc $e^{i\theta}=\lambda\times\dfrac{e^{i\phi}-e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}$.

d) $e^{-i\theta}=\dfrac{1}{e^{i\theta}}$ ou encore $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$ pour tout complexe z de module 1.

En effet, si $z\bar{z}=1$ alors $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$, ce qui est le cas des complexes de la forme $e^{i\theta}$.

e) première méthode : $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=e^{2i\theta}$

deuxième méthode : comme $e^{i\theta}=\lambda\times\dfrac{e^{i\phi}-e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}$ alors $e^{-i\theta}=\lambda\times\dfrac{e^{-i\phi}-e^{-i\alpha}}{1-e^{-i\alpha}}$

donc $e^{-i\theta}=\lambda\times\dfrac{\dfrac{1}{e^{i\phi}}-\dfrac{1}{e^{i\alpha}}}{1-\dfrac{1}{e^{i\alpha}}}$ et $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=\dfrac{e^{i\phi}-e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\times\dfrac{1-\dfrac{1}{e^{i\alpha}}}{\dfrac{1}{e^{i\phi}}-\dfrac{1}{e^{i\alpha}}}$

Finalement on obtient bien $\boxed{e^{2i\theta}=\dfrac{e^{i\phi}-e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\times\dfrac{1-\dfrac{1}{e^{i\alpha}}}{\dfrac{1}{e^{i\phi}}-\dfrac{1}{e^{i\alpha}}}}$.

f) En multipliant la deuxième fraction par $e^{i\alpha}$ au numératuer et au dénominateur, on obtient :

$e^{i2\theta}=\dfrac{e^{i\phi}-e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\times\dfrac{e^{i\alpha}-1}{\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\phi}}-1}=\dfrac{e^{i\phi}-e^{i\alpha}}{1-\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\phi}}}=\ldots=e^{i\phi}$ en finissant correctement le calcul

On obtient donc $2\theta=\phi+2k\pi$, ce qui peut se traduire par $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=2\times(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})[2\pi]$.

Cette propriété géométrique des arcs de cercles s'énonce ainsi :

L'angle au centre qui intercepte un arc de cercle $\widehat{AB}$ est le double de tout angle inscrit qui intercepte le même arc de cercle.