

# Exercices sur les limites de fonctions

## Opérations sur les limites

### EXERCICE I

---

#### Fonctions polynômes

Déterminer les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  des polynômes suivants :

1)  $P(x) = 5x^3 - 3x + 1$

2)  $Q(x) = -2x^4 + x^2 + 3$

### EXERCICE II

---

#### Fonction rationnelles

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions rationnelles suivantes puis déterminer les limites aux bornes de leur ensemble de définition.

1)  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 - x}$

3)  $h(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

2)  $g(x) = \frac{x + 2}{(x + 3)^2}$

4)  $k(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x + 2}$

### EXERCICE III

---

#### Démontrer une conjecture graphique

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{1; 2\}$  par :  $f(x) = \frac{2x^2}{(x - 1)(2 - x)}$

- 1) Tracer cette fonction sur votre calculatrice. Conjecturer alors les limites en  $-\infty$ , 1, 2 et  $+\infty$ . On prendra comme fenêtre  $x \in [2; 5]$  et  $y \in [-30; 30]$
- 2) Démontrer ces conjectures.

## Limite d'une fonction composée

### EXERCICE IV

---

#### En vrac

Déterminer les limites des fonctions suivantes au point d'abscisse demandé

1)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$  en  $x = 5$

4)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  en  $x = 1$

2)  $f(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$  en  $-\infty$

5)  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x + 1}{x + 2}\right)$  en  $+\infty$

3)  $f(x) = \sqrt{\frac{-x+1}{x^2+1}}$  en  $-\infty$

6)  $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{1-x}}$  en  $-\infty$

7)  $f(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$  en  $+\infty$

## EXERCICE V

---

### Fonction composée deux fois

$f$  est une fonction définie sur  $] - 5; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x - 3}{x + 5}$

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f[f(x)]$
- 2) Trouver la forme algébrique de  $f[f(x)]$  puis retrouver le résultat du 1)

## EXERCICE VI

---

### Formes indéterminées

Déterminer les limites des fonctions suivantes au point d'abscisse demandé

- 1)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$  en  $-\infty$
- 2)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$  en  $+\infty$
- 3)  $f(x) = \sqrt{4x^2 + x} + 2x$  en  $-\infty$
- 4)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$  en 1,  $+\infty$  et  $-\infty$

## Algorithmique

### EXERCICE VII

---

#### Courbe asymptote

$f$  et  $g$  sont les fonctions définies sur  $] - 2, -\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x + 2)} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2$$

- 1) Tracer dans une même fenêtre de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ . Qu'observe-t-on pour les grande valeurs de  $x$  ?
- 2) a) Démontrer que pour tout  $x > 2$  :  $g(x) - f(x) = \frac{4}{x + 2}$   
b) En déduire la limite de  $g(x) - f(x)$  en  $+\infty$ .  
c) Étudier la position relative des courbes représentatives des fonction  $f$  et  $g$ .
- 3) On considère l'algorithme ci-contre
  - a) Expliquer le rôle de cet algorithme.
  - b) Quelle valeur de  $x$ , l'algorithme affiche-t-il lorsque l'on saisit  $a = 0,01$  ?

#### Entrée et initialisation

Saisir  $a$  un nombre positif proche de 0  
 $x$  prend la valeur  $-1$

#### Traitement

Tant que  $\frac{4}{x + 2} > a$

$x$  prend la valeur  $x + 1$

Fin Tantque

#### Sortie

Afficher  $x$

## EXERCICE VIII

---

### Fonction catastrophe

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{(x^{20} + 100)^2 - 10\,000}{x^{20}}$

- 1) A l'aide de votre calculatrice, déterminer les valeurs approchées de  $f(x)$  pour des valeurs proche de 0. Recopier et remplir le tableau suivant :

$x$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01
$f(x)$							

- 2) En développant  $(x^{20} + 100)^2$ , trouver une expression simplifiée de  $f(x)$ .  
3) Déterminer alors la limite de la fonction  $f$  en 0.  
4) Comment expliquer cette différence de valeur entre le tableau de valeurs et la limite en 0.

## Limites par comparaison

### EXERCICE IX

---

#### En vrac

Par un encadrement judicieusement choisi, déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1}$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2-\cos x}$

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x \sin x$

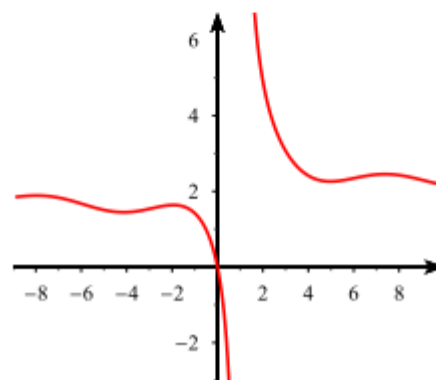
### EXERCICE X

---

#### Asymptotes

$f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par :  $f(x) = \frac{2x + \sin x}{x-1}$

- 1) On a représenté ci-contre la fonction  $f$ . Conjecturer les limites de la fonction  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  et les limites à gauche et à droite de 1.  
2) a) Démontrer les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  grâce à un encadrement.  
b) Déterminer les limites à gauche et à droite de 1  
c) Interpréter graphiquement les limites obtenues.



**Exercice 11 :**

1) Montrer que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{5-4x}{2x+3}$  admet la droite d'équation  $y = -2$  comme asymptote horizontale en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

2) Étudier la position relative de la courbe  $C_f$  avec son asymptote.

**Exercice 12 : T.V.I.**

1) L'équation  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}x$  admet-elle une solution ?

2) Si oui, combien ? Démontrer-le.

3) Donner en une valeur approchée à  $10^{-4}$  près.

**Exercice 13 : Quelles sont les asymptotes des fonctions suivantes ?**

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1} \quad g(x) = \frac{3x-8}{7-x} \quad h(x) = \frac{-5x^2+2x-4}{3-x^2} \quad k(x) = \frac{x-3}{x^2+x-6}$$

**Exercice 14 : asymptote oblique**

On donne  $f(x) = \frac{2x^2-4}{x-1}$ .

Domaines, dérivée et tableau de variation si on peut.

Montrer que  $y = 2x+2$  est asymptote à la courbe  $C_f$ .

**Exercice 15 : asymptote oblique**

Soit  $g(x) = \frac{2x^3-x^2+9x-2}{x^2+2}$ .

Comment trouver le début de l'équation de l'asymptote oblique :  $y = ax + \dots$

Et comment trouver la fin ? Puis le démontrer.

**Exercice 16 : Déterminer les limites en l'infini des fonctions suivantes :**

$$f(x) = \frac{2x^3+x+7}{8-x^3} \quad g(x) = \frac{2x^2-5x+3}{x-4} \quad h(x) = \sqrt{4x^2+1} + 2x$$

**Exercice 17 :**  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-2x-15}{x-5}$        $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$        $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

Quelques fonctions en vrac...

**Exemples :**  $f(x) = x^2 + x + 3$

$g(x) = 3x^2 - x + 2$

**Exemples :**  $f(x) = (x+5)(3+x)$

$g(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{2x - 1}$

**Exemples :**  $f(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{6x + 3}$

$g(x) = 5 - \sqrt{3 - x}$

**Exemples :**  $f(x) = \frac{2x - 5}{3x - 4}$

$g(x) = \frac{4x^2 - 5x + 1}{3 - 2x^2}$

$h(x) = x - \sqrt{x^2 - 3}$

**Exemples :**  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 4}$

$g(x) = \frac{3x^4 - 2x^3 + 3x - 1}{2x^4 - 1}$