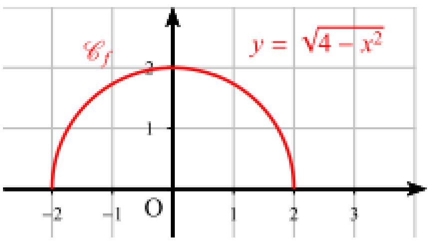
Exercices sur le calcul intégrale

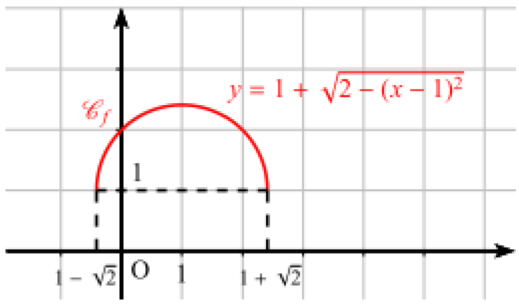
-------------------------------- Notions d'intégrales ---------------------------------

Exercice n°1 :

Dans chaque cas, la fonction f est représentée par sa courbe $\mathscr{C}_f$, dont une équation est indiquée.

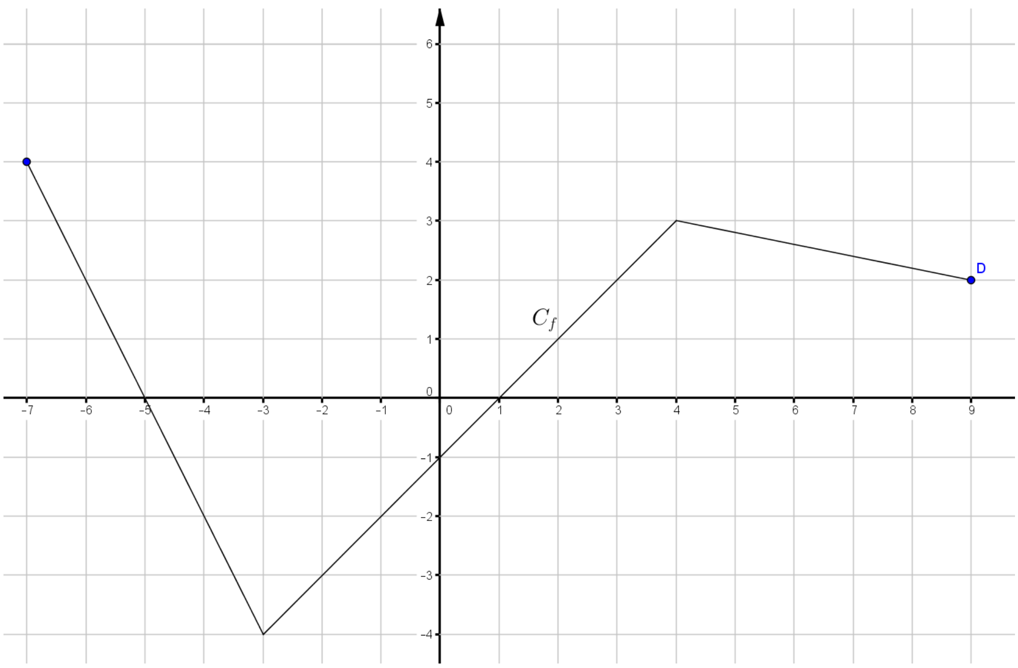
1) Prouver que $\mathscr{C}_f$ est un demi-cercle. Préciser son centre et son rayon.
2) En déduire l'intégrale I de f sur son intervalle de définition. En donner ensuite une valeur approchée puis vérifier le résultat sur votre calculette.





Exercice n°2 :

On donne la courbe d'une fonction f dans un repère d'unité 0,5 cm sur chacun des deux axes.



Déterminer $\int_{-7}^{9} f(x)\,dx$.

Exercice n°3 : On considère la fonction $f(t) = |3t - 6|$.

1) Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormé.

2) La fonction $g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$?

3) Calculer $g(4)$ puis $g(-2)$.

4) Donner l'expression de $g(x)$ en fonction de x.

5) La fonction g est-elle continue ? Est-elle dérivable ?

6) Étudier les variations de g puis donner l'allure de sa courbe

Exercice n°4 :

Polynésie juin 2013

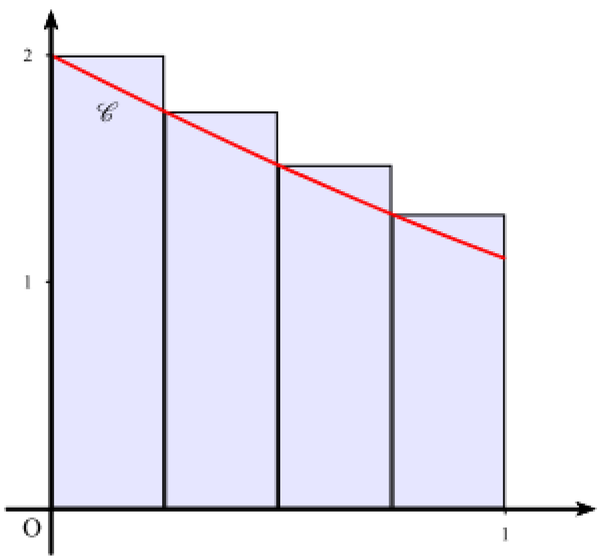
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.

a) Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0 ; 1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4} ; 1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-contre.



Cet algorithme permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine en ajoutant l'aire des quatre rectangles précédents.
Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.
S'agit-il d'une valeur par excès ou par défaut ?

$S \leftarrow 0$

Pour i variant de 0 à 3 faire :

$$S \leftarrow S + \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{4}\right)$$

Fin du Pour

```python
# définition de la fonction
def ma_fonction(a):
    return (a + 2)*exp(-a)
# programme principal
from lycee import *
s = 0
for i in range(4):
    s = s + ma_fonction(i/4)/4
print("s=",s)
```

b) Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question a).
Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits. Faites le calcul pour $N = 100$.

c) Vérifier le résultat en calculant la valeur approchée de l'intégrale de f de 0 à 1. Quelle est l'erreur commise en prenant $N = 4$, valeur trouvée en a).

---------------------------------- Calculs de Primitives ----------------------------------

Exercice n°5 :

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 4x^3$ sur $I = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_2(x) = 6x^5 + 4x^3 - 1$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_3(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ sur $I = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_4(x) = 4x^7 - x^6 - \frac{2}{3}x - 5$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_5(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 9$ sur $I =]0;+\infty[$ $\qquad$ $f_6(x) = \frac{3}{x}$ sur $I =]0;+\infty[$

$f_7(x) = \sin x - 3\cos x$ sur $I = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_8(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - x$ sur $I = \mathbb{R}^*$

Exercice n°6 :

Linéarité de la primitive

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3,\quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3},\quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^3},\quad I =]0; +\infty[$

4) $f(x) = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 1,\quad I =]0; +\infty[$

5) $f(x) = \dfrac{4}{x} + 2e^x,\quad I =]0; +\infty[$

Exercice n°7 :

Forme $u'u^n$

1) $f(x) = (x+2)^3, \quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 2x(1+x^2)^5, \quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{(x-1)^5}{3}, \quad I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = 2x(3x^2-1)^3, \quad I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sin x \cos x, \quad I = \mathbb{R}$

Exercice n°8 :

Forme $\dfrac{u'}{u^n}$, $n \geqslant 2$

1) $f(x) = \dfrac{2}{(x+4)^3}, \quad I =]-4;+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}, \quad I = \left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right[$

3) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}, \quad I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}, \quad I =]-1;3[$

5) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3+8)^3}, \quad I =]-2;+\infty[$

Exercice n°9 :

Forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

1) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}, \quad I = \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

2) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad I =]1;+\infty[$

Exercice n°10 :

Forme $u'e^u$

1) $f(x) = e^{-x+1}, \quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 2e^{3x-2}, \quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}, \quad I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \sin x \times e^{\cos x}, \quad I = \mathbb{R}$

Exercice n°11 :

Forme $u(ax+b)$

1) $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x), \quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 3\cos x - 2\sin(2x) + 1, \quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right), \quad I = \mathbb{R}$

Exercice n°12 :

Pour les exercices suivants , trouver la primitive F, de la fonction f, qui vérifie la condition donnée sur un intervalle I à préciser.

1) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 1,\ F(2) = 0$

2) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + x,\ F(1) = 0$

3) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2},\ F(0) = 0$

4) $f(x) = -\dfrac{1}{3-x},\ F(1) = 1$

5) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2},\ F(0) = 0$

6) $f(x) = e^{3x+1},\ F(-1) = 0$

7) $f(x) = xe^{-x^2},\ F(\sqrt{\ln 2}) = 1$

8) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1},\ F(2) = 0$

9) $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right),\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

10) $f(x) = \cos x \sin^2 x,\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

11) $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2} - 3\sin\dfrac{x}{2},\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

---------------------------------- Calculs d'intégrales ----------------------------------

Exercice n°13 : Calculer les intégrales à l'aide d'une primitive.

1) $I = \displaystyle\int_0^4 (x-3)\,\mathrm{d}x$

2) $I = \displaystyle\int_{-1}^2 (t^2 - 4t + 3)\,\mathrm{d}t$

3) $I = \displaystyle\int_1^2 \left(t^2 + t - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$

4) $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

5) $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,\mathrm{d}x$

6) $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}t}{(2t+1)^2}$

Exercice n°14 :

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une primitive :

$I_1 = \displaystyle\int_0^4 (x-3)\,\mathrm{d}x$ $\qquad I_2 = \displaystyle\int_2^{-1} (t^2 - 4t + 3)\,\mathrm{d}t$ $\qquad I_3 = \displaystyle\int_1^2 \left(3u^2 + 2u - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u$

$I_4 = \displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ $\qquad I_5 = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ $\qquad I_6 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{3x+2}\,\mathrm{d}x$

$I_7 = \displaystyle\int_0^1 2t\,\mathrm{e}^{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ $\qquad I_8 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$ $\qquad I_9 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2t)\,\mathrm{d}t$

Exercice n°15 :

1) a) Trouver trois réel a, b et c tels que : $\dfrac{4x^2+7x+1}{x+2} = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$

b) En déduire : $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{4x^2+7x+1}{x+2}\,\mathrm{d}x$

2) a) Prouver que pour tout réel x : $\dfrac{1}{1+e^x} = 1 - \dfrac{e^x}{1+e^x}$

b) En déduire : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

Exercice n°16 :

1) Rappeler l' expression de $\sin^2 a$ en fonction de $\cos 2a$

2) Déduisez-en $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 x \;\mathrm{d}x$

Exercice n°17 : Déterminer la valeur des intégrales suivantes :

1) $I = \displaystyle\int_0^4 \mathrm{d}x$

2) $I = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x}\,\mathrm{d}x$

3) $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$

4) $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{3x-2}\,\mathrm{d}x$

5) $I = \displaystyle\int_0^1 5e^{3x}\,\mathrm{d}x$

6) $I = \displaystyle\int_0^1 te^{t^2-1}\,\mathrm{d}t$

Correction Exercice n°4 :

1) Avec l'algorithme suivant en Python :

```python
# Exercice n°6 intégrales
from lycee import *
def foo(x):
    return (x+2)*exp(-x)
# programme principal
aire=0
for i in range(4):
    aire=aire+1/4*foo(i/4)
print("aire =",aire)
```

j'obtiens :

```
>>>
...module lycee actif....
 Unité d'angles : degrés
aire = 1.6419091078075088
>>>
```

On peut donc répondre 1,642 comme valeur approchée à 10^{-3} près.

Cette valeur approchée est par excès puisque les rectangles sont au-dessus de la courbe. (cela vient du fait que la fonction est décroissante, et que l'on choisit les premiers rectangles)

2) Pour découper l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de même longueur $h=\dfrac{1}{n}$ (le pas),

il suffit de considérer la suite des abscisses $x_k=kh$, pour k entier variant de 0 à n.

(quelle serait l'expression d'une telle suite sur un intervalle $[a;b]$?)

Chaque rectangle a ainsi pour aire $hf(x_k)$. D'où l'algorithme suivant :

```python
# Exercice n°6 intégrales
from lycee import *
def foo(x):
    return (x+2)*exp(-x)
# programme principal
n=100
h=1/n
aire=0
for k in range(n):
    aire=aire+h*foo(h*k)
print("aire =",aire)
```

Qui donne en résultat :

```
...module lycee actif....
 Unité d'angles : degrés
aire = 1.532966245719862
```

3) Avec la calculatrice j'obtiens aire ≈ 1,5285 ce qui fait une erreur absolue de moins de $0{,}12$ par rapport à la question précédente.

quelle serait l'erreur relative ?

<u>N.B.</u> : On peut faire un calcul exact en recherchant une primitive de $f(x)=(x+2)e^{-x}$ sous la forme $\mathrm{F}(x)=(ax+b)e^{-x}$.