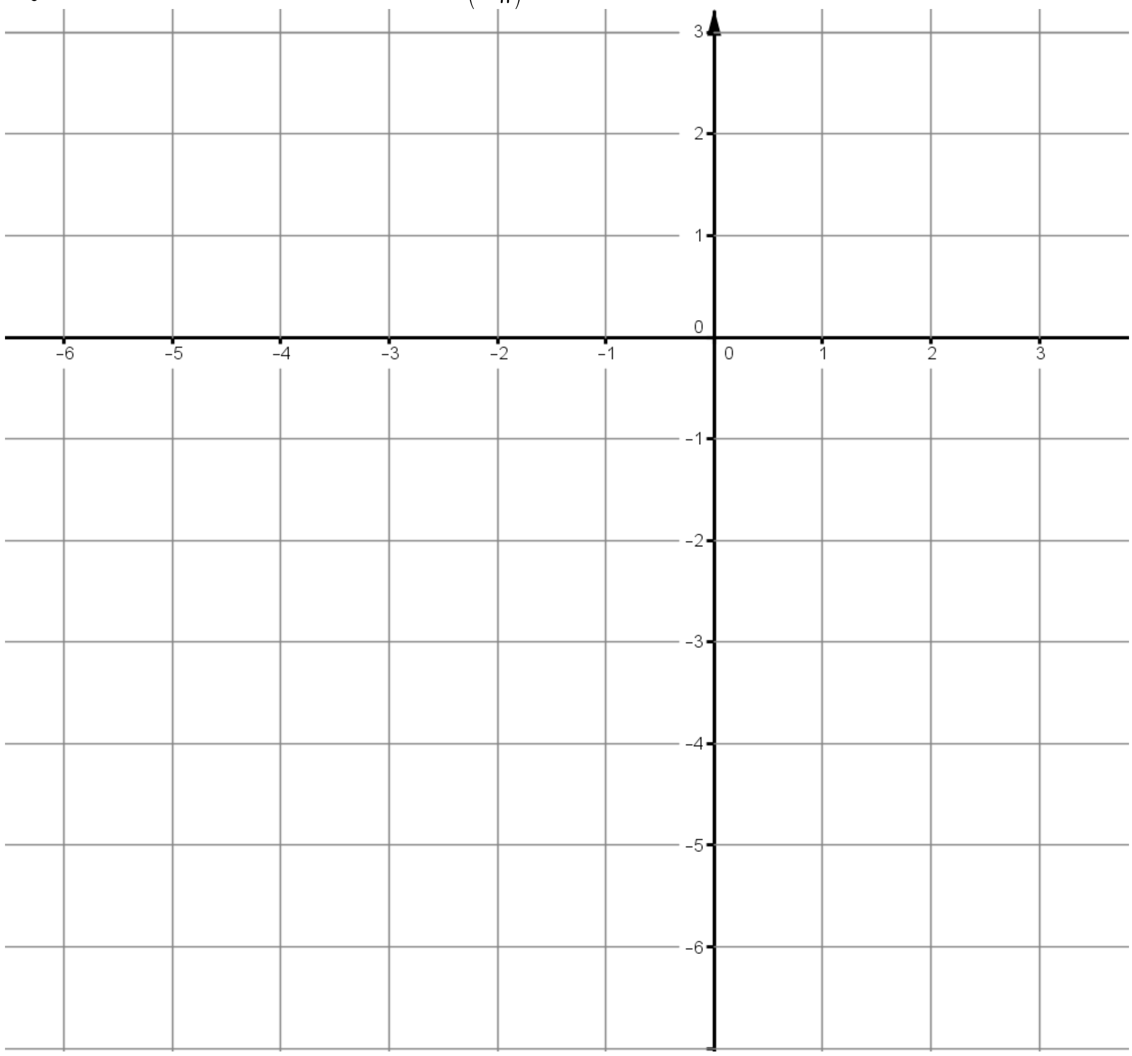
Contrôle : suites arithmético-géométriques - sujet A

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f\left(u_n\right) \end{cases}$ où $f\left(x\right)=\dfrac{2x-5}{3}$.

1) <u>Sur le graphique suivant</u> : Tracer la première bissectrice, la droite d'équation $y=f\left(x\right)$ puis représenter les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

Conjecturer la limite de la suite $\left(u_n\right)$.



2) Déterminer l'abscisse x_0 du point fixe de la fonction f.

3) On définit alors la suite $\left(v_n\right)$ par : $v_n=u_n-x_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Montrer que la suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

4) Donner alors l'expression de v_n en fonction de n.

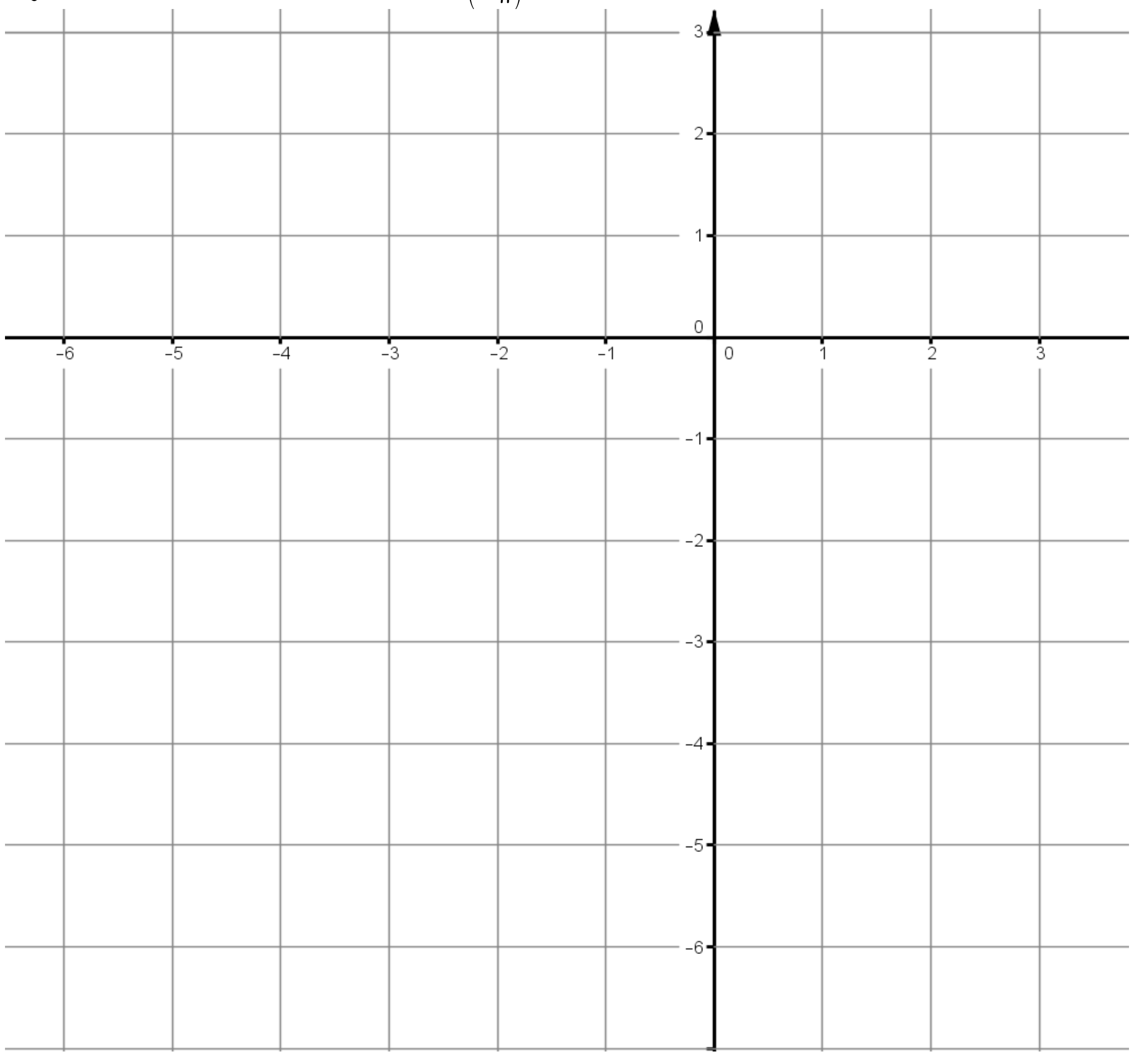
5) En déduire l'expression de u_n en fonction de n. Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)$.

Contrôle : suites arithmético-géométriques - sujet B

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où $f(x) = \dfrac{4x-3}{5}$.

1) <u>Sur le graphique suivant</u> : Tracer la première bissectrice, la droite d'équation $y = f(x)$ puis représenter les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

Conjecturer la limite de la suite (u_n).



2) Déterminer l'abscisse x_0 du point fixe de la fonction f .

3) On définit alors la suite (v_n) par : $v_n = u_n - x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .

4) Donner alors l'expression de v_n en fonction de n .

5) En déduire l'expression de u_n en fonction de n . Déterminer la limite de la suite (u_n).

Correction - sujet A

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ où $f(x)=\dfrac{2x-5}{3}$.

1) Graphique : Il semble que la suite (u_n) converge vers -5.

2) Point fixe de la fonction f : $f(x_0)=x_0 \Leftrightarrow \dfrac{2x_0-5}{3}=x_0$ ce qui donne $x_0=-5$.

3) $v_n=u_n+5$ donc $v_{n+1}=u_{n+1}+5$ avec $u_{n+1}=\dfrac{2u_n-5}{3}$;

soit $v_{n+1}=\dfrac{2u_n-5}{3}+5=\dfrac{2u_n-5+15}{3}=\dfrac{2u_n+10}{3}=\dfrac{2(u_n+5)}{3}$;

d'où $v_{n+1}=\dfrac{2}{3}v_n$ ce qui prouve que :

(v_n) est une suite géométrique, de premier terme $v_0=6$ et de raison $q=\dfrac{2}{3}$.

4) On a alors $v_n=6\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

5) Et donc $u_n=6\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-5$.

Comme $\left(\dfrac{2}{3}\right)<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$; et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-5$, le point fixe de la fonction f.

Correction - sujet B

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ où $f(x)=\dfrac{4x-3}{5}$.

1) <u>Graphique</u> : Il semble que la suite (u_n) converge vers -3.

2) Point fixe de la fonction f : $f(x_0)=x_0 \Leftrightarrow \dfrac{4x_0-3}{5}=x_0$ ce qui donne $x_0=-3$.

3) $v_n=u_n+3$ donc $v_{n+1}=u_{n+1}+3$ avec $u_{n+1}=\dfrac{4u_n-3}{5}$;

soit $v_{n+1}=\dfrac{4u_n-3}{5}+3=\dfrac{4u_n-3+15}{5}=\dfrac{4u_n+12}{5}=\dfrac{4(u_n+3)}{5}$;

d'où $v_{n+1}=\dfrac{4}{5}v_n$ ce qui prouve que :

(v_n) est une suite géométrique, de premier terme $v_0=4$ et de raison $q=\dfrac{4}{5}$.

4) On a alors $v_n=4\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

5) Et donc $u_n=6\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^n-3$.

Comme $\left(\dfrac{4}{5}\right)<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n=0$; et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-3$, le point fixe de la fonction f.