– Récurrence et Suites -

Exercice n°1 :

Démontrer par récurrence que : pour tout entier n, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7.

Exercice n°2 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=5$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n+4}{3}$.

a) Démontrer par récurrence que : $u_n>2$ pour tout entier n.

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice n°3 :

On considère la suite (u_n) géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0=1$.
On admettra que cette suite tend vers $+\infty$.
Étant donné un réel positif M, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n>M$.

1) Expliquer pourquoi un tel entier n existe forcément.

2) Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche la valeur voulue.

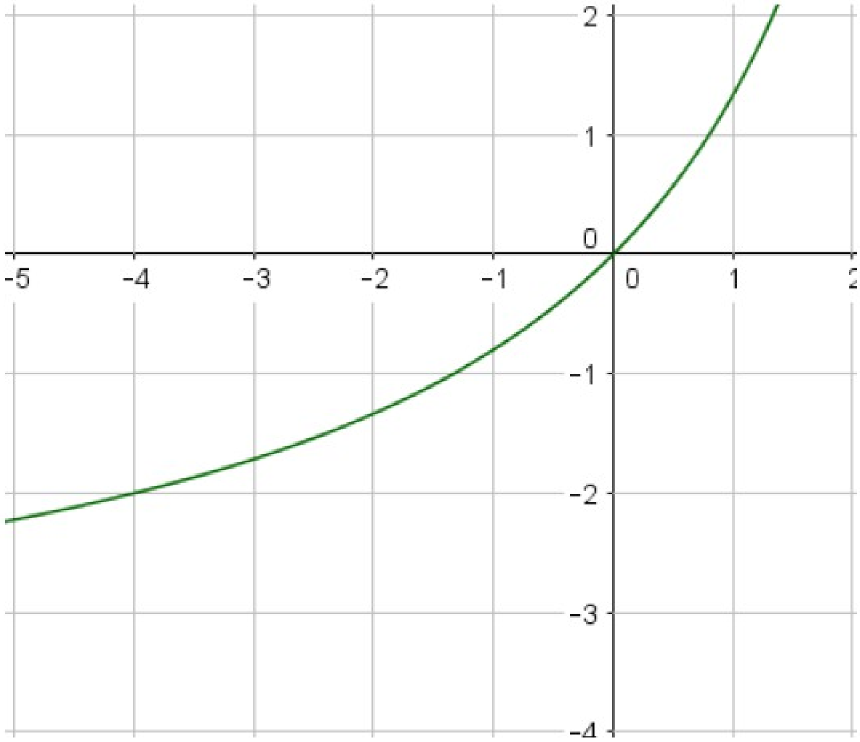
Variables	n un entier naturel
	U et M deux nombres réels
Initialisation	Récupérer la valeur de M
	$n=0$
	$U=2$
Traitement	
Sortie	

Exercice n°4 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4-u_n}$.

1) On considère la fonction f définie sur $]-\infty ; 0]$ par $f(x) = \dfrac{4x}{4-x}$.

a) Montrer que la fonction f est croissante sur $]-\infty ; 0]$.

b) On a représenté la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Construire les quatre premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.



c) Quelles conjectures peut-on faire quand au comportement de la suite (variations et convergence) ?

d) Montrer par récurrence que la suite est croissante et négative.

2) On admet que tous les termes de la suite (u_n) sont non nuls, et on note alors (v_n) la suite définie par : $v_n = 3 + \dfrac{2}{u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. Donner son premier terme et sa raison.

b) Exprimer alors v_n en fonction de n.

c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et déterminer la limite de (u_n).