- DS de mathématiques sur les suites -

Exercice n°1 : Un apiculteur installe 300 colonies d'abeilles.
Chaque hiver, il perd 8% de ses colonies, et en installe donc 50 supplémentaires.

On appelle C_n le nombre de colonies au bout de n années. Ainsi $C_0=300$.

1) Justifier rapidement la relation de récurrence : $C_{n+1}=0,92C_n+50$.

2) Donner le nombre de colonies dans 5 ans.

3) On considère maintenant la suite (V_n) définie par : $V_n=625-C_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Exprimer $0,92V_n$ en fonction de C_n ; exprimer V_{n+1} en fonction de C_n ;

b) Quelle est la nature de la suite (V_n) ? Calculer V_0 ;

c) Exprimer alors V_n en fonction de n.

4) Montrer rapidement qu'alors $C_n=625-325\times 0,92^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

5) Combien d'années lui faudra-t-il pour doubler son nombre de colonies ?

Exercice n°2 : On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=-2 \\ u_{n+1}=\sqrt{3u_n+10} \quad \text{pour tout entier } n \end{cases}$.

1) Placer les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

a) Quel majorant peut-on conjecturer pour la suite (u_n) ?

b) Démontrer cette conjecture par récurrence.

c) Quel sens de variation peut-on conjecturer ?

2) Démontrons ce sens de variation :

a) Démontrer que $u_{n+1}-u_n$ est du signe de $-u_n{}^2+3u_n+10$;

(pensez à utiliser la quantité conjuguée pour faire disparaître une racine carrée)

b) Donner le tableau de signe du polynôme $-x^2+3x+10$:

c) Justifier que $-2\leqslant u_n\leqslant 5$ pour tout entier n ;

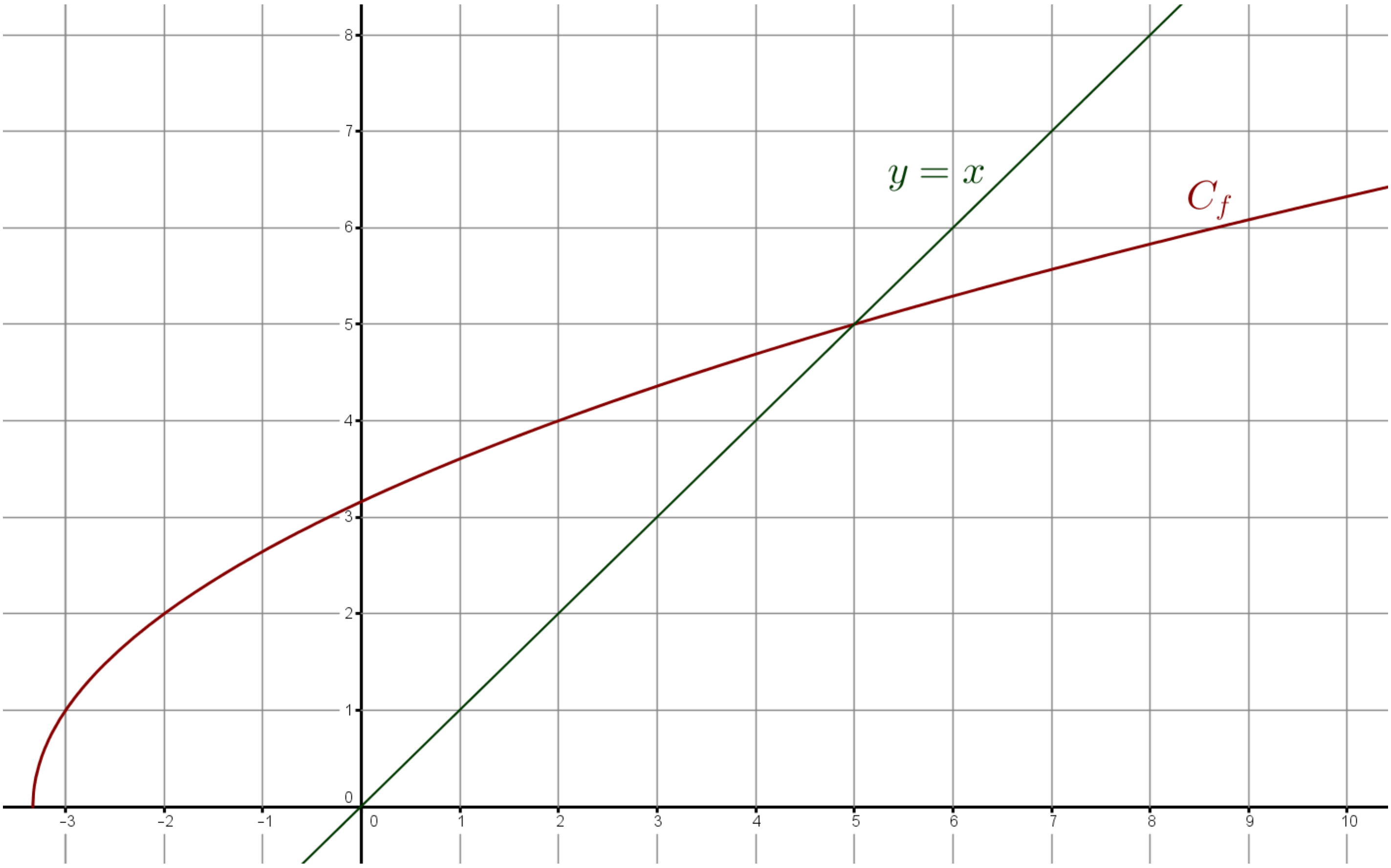
d) Conclure.

3) Cette suite converge car elle est croissante et majorée, et sa limite est nécessairement 5 car $u_{n+1}=f(u_n)$.

Mais quelle serait la limite de la suite si l'on prenait $f(x)=\sqrt{8-2x}$?

Voici la représentation graphique C_f de la fonction f associée à la suite $\left(u_n\right)$.
Son expression est donc : $f\left(x\right)=\sqrt{3x+10}$.

La première bissectrice d'équation $y=x$ est également tracée.



Correction

Exercice n°1 :

1) $C_{n+1}=0,92C_n+50$ car une baisse de 8% correspond à une multiplication par $0,92$.

2) A la calculatrice, j'obtiens : $C_5\approx 410,8$. Il y aura donc 411 colonies dans 5 ans.

3) a1) Comme $V_n=625-C_n$ on a $0,92V_n=0,92\times 625-0,92C_n$ soit $0,92V_n=575-0,92C_n$.

a2) $V_{n+1}=625-C_{n+1}=625-(0,92C_n+50)=625-0,92C_n-50$ soit $V_{n+1}=575-0,92C_n$.

b) Comme $V_{n+1}=0,92V_n$, j'en déduis que la suite (V_n) est géométrique de raison $0,92$.

Son premier terme est $V_0=625-C_0=625-300$ soit $V_0=325$.

c) On a donc : $V_n=V_0\times q^n$ ce qui donne : $V_n=325\times 0,92^n$.

4) Comme $V_n=625-C_n$ alors $C_n=625-V_n$, soit $C_n=625-325\times 0,92^n$.

5) A la calculatrice, j'obtiens : $C_{30}\approx 598$ et $C_{31}\approx 600,5$, donc il faudra 31 années.

Exercice n°2 : On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=-2 \\ u_{n+1}=\sqrt{3u_n+10} \quad \textit{pour tout entier } n \end{cases}$.

1) a) La suite (u_n) semble majorée par 5.

b) Soit P_n la proposition suivante : $u_n\leqslant 5$.
Démontrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier n :

Initialisation : $u_0=-2\leqslant 5$ donc P_0 est vraie.

H.R. : Je suppose que $u_k\leqslant 5$ pour un entier quelconque k fixé ;

Hérédité : $u_k\leqslant 5$ donc $3u_k+10\leqslant 25$ et $\sqrt{3u_k+10}\leqslant\sqrt{25}$ par croissance de la fct racine carrée ;

ce qui donne $u_{k+1}\leqslant 5$ et donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant 5$.

c) Il semble que la suite (u_n) soit croissante.

2) a)

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \sqrt{3u_n+10}-u_n \\ &= \frac{\left(\sqrt{3u_n+10}-u_n\right)\left(\sqrt{3u_n+10}+u_n\right)}{\sqrt{3u_n+10}+u_n} \\ &= \frac{3u_n+10-u_n^2}{\sqrt{3u_n+10}+u_n} \\ &= \frac{-u_n^2+3u_n+10}{\sqrt{3u_n+10}+u_n} \end{aligned}$$

Comme le dénominateur est positif ($u_0=-2$ mais $u_1=2$ et la suite est croissante), cela prouve bien que $u_{n+1}-u_n$ est du signe de $-u_n^2+3u_n+10$.

b) J'obtiens $\Delta=49$ puis $x_1=5$ et $x_2=-2$, d'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
signe de $-x^2+3x+10$		-	0	+	0	-	

c) Comme $u_0=-2$ et que la suite (u_n) est croissante, alors $u_n \geqslant -2$ pour tout entier n ;
On a donc bien : $-2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) On a donc $-u_n^2+3u_n+10 \geqslant 0$ pour tout entier n, donc $u_{n+1}-u_n$ est toujours positif.

Ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

3) Si l'on avait $f(x)=\sqrt{8-2x}$ alors la limite de la suite serait obligatoirement un point fixe de la fonction f ; recherchons donc ses points fixes en résolvant l'équation $f(x)=x$:

$$f(x)=x \Leftrightarrow \sqrt{8-2x}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ est positif} \\ 8-2x=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ est positif} \\ x=-4 \text{ ou } x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Donc dans ce cas la limite de la suite $u_{n+1}=f(u_n)$ serait 2,

mais à condition de prouver au préalable que cette suite admet bien une limite...

Peut-être faudrait-il regarder de plus près ce qu'il se passe suivant la valeur de u_0 !