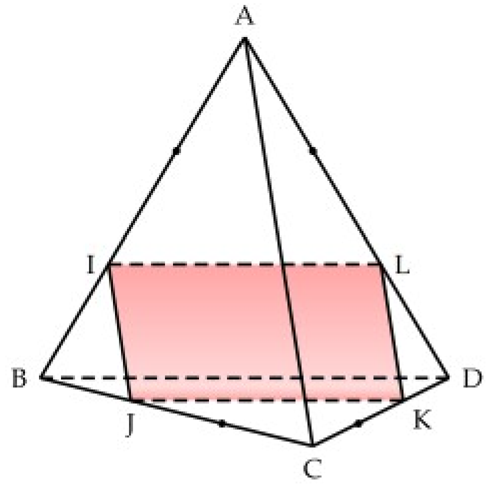
- Correction ou pistes pour les exercices du cours -

Exercice n°1 : Soit un tétraèdre $ABCD$. On considère les points I, J, K et L définis par :

$\vec{AI}=\frac{2}{3}\vec{AB}$, $\vec{BJ}=\frac{1}{3}\vec{BC}$, $\vec{CK}=\frac{2}{3}\vec{CD}$ et $\vec{DL}=\frac{1}{3}\vec{DA}$.



On a $\vec{IJ}=\vec{IB}+\vec{BJ}=\frac{1}{3}\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{BC}=\frac{1}{3}\vec{AC}$

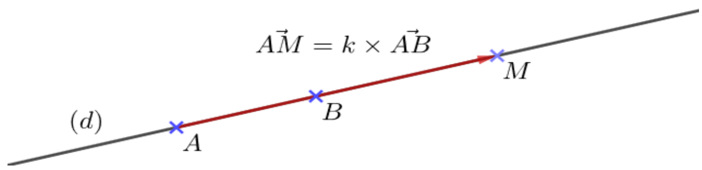
De même $\vec{LK}=\vec{LD}+\vec{DK}=\frac{1}{3}\vec{AD}+\frac{1}{3}\vec{DC}=\frac{1}{3}\vec{AC}$

Donc $\vec{IJ}=\vec{LK}$ ce qui prouve que $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice n°2 : Soit (d) la droite passant par $A(2,-5,3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$.

De l'égalité $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}=k\times\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$,

on obtient $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}+k\times\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$,



ce qui justifie la notation affine $M=A+k\vec{u}$,
et donne directement un système de représentation des coordonnées du point M en fonction du paramètre k :

$$\begin{cases}x=2+k\\y=-5+4k\\z=3-2k\end{cases}\text{ pour } k\in\mathbb{R}.$$

Exercice n°3 : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires.

1) Montrer que les points $A(1;-2;3)$, $B(4;4;-3)$ et $C(-1;-6;7)$ sont alignés.

Les points sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\6\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\-4\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Comme 3/-2 = 6/-4 = -6/4 = - 3/2 on a $\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, alors les vecteurs sont colinéaires.

Deux vecteurs colinéaires ne permettent pas de définir un plan.

2) Montrer que les points $D(1;2;-3)$, $E(3;-2;4)$ et $F(-3;10;5)$ définissent un plan.

On doit vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2\\-4\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-4\\8\\8\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

On a -4/2 = 8/-4 mais pas 8/7 donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Deux vecteurs non colinéaires, ou trois points non alignés définissent bien un plan, vectoriel dans le premier cas, et affine dans le second.

Exercice n°4 : Montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}7\\16\\-9\end{pmatrix}$ sont coplanaires.

Deux vecteurs sont toujours coplanaires.
Donc si deux de ces vecteurs sont colinéaires, alors les trois vecteurs sont coplanaires, car ils ne forment plus qu'au maximum deux directions indépendantes.

Vérifions que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires en montrant que $\vec{u} = k\vec{v}$ est impossible.

En effet, si c'était le cas, comme dans le plan on aurait $xy' - x'y = 0$,
alors qu'ici $1\times 4 - (-2)\times 3 = 10$.

On vérifie ensuite visuellement, ou par le calcul si nécessaire, que $\vec{w}$ n'est colinéaire ni à $\vec{u}$ ni à $\vec{v}$, mais c'est mieux de la faire avant.

Montrons maintenant que $\vec{w}$ peut s'exprimer en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sous la forme d'un combinaison linéaire $\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$, qui donne le système suivant :

$$\begin{cases} 7 = \alpha + 3\beta \\ 16 = -2\alpha + 4\beta \\ -9 = 3\alpha - \beta \end{cases}$$

On montre ensuite que ce système possède bien une solution.
Ici on doit obtenir $\alpha = -2$ et $\beta = 3$.

Exercice n°5 : Vérifier si trois vecteurs sont coplanaires.

1) Montrer que $A(2;0;1)$, $B(1;-2;1)$, $C(5;5;0)$ et $D(-3;-5;6)$ sont coplanaires.

On forme trois vecteurs avec un même point : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix}$.

Si l'on visualise deux vecteurs colinéaires, alors il est certain que les trois vecteurs forment au maximum deux directions différentes, donc ils seront coplanaires.

Sinon on choisit deux vecteurs, et on vérifie qu'ils ne sont pas colinéaires.

Par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car le premier produit en croix $-1\times 5-(-2)\times 3 \neq 1$ n'est pas nul.

Montrons alors que $\overrightarrow{AD}$ peut s'écrire $\overrightarrow{AD}=\alpha\,\overrightarrow{AB}+\beta\,\overrightarrow{AC}$.

Cette égalité se traduit par le système suivant :

$\begin{cases}-1=3\alpha-5\beta\\-2=5\alpha-5\beta\\0=-\alpha+5\beta\end{cases}$ qui possède bien une solution $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ et $\beta=-\dfrac{1}{10}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ appartient donc au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) Montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-13\\26\\-10\end{pmatrix}$ ne sont pas coplanaires.

On vérifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires,
puis on montre que le système $\vec{w}=\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}$ n'admet pas de solution.

Exercice n°6 :

Soient les points $A(6;8;2)$, $B(4;9;1)$ et $C(5;7;3)$ dans un repère orthonormal.
Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Il faut savoir calculer rapidement des longueurs ou des milieux :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ donc $AB^2=2^2+1^2+1^2=6$ et ainsi de suite.

Le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse, donc ici le milieu de $[BC]$.

Exercice n°7 :

1) Donner une représentation paramétrique de la droite $d\left(A(2;1;-1);\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Un point $M(x,y,z)$ de l'espace appartient à cette droite si et seulement si $M=A+t\vec{u}$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases}x=2\\y=1-t\\z=-1-t\end{cases}\quad \text{pour } t\in\mathbb{R}.$$

2) On donne $A(-2;1;0)$ et $B(2;3;1)$.
Donner une des ensembles suivants :

a) représentation paramétrique de la droite (AB) :

Un point $M(x,y,z)$ de l'espace appartient à cette droite si et ssi $M=A+t\overrightarrow{AB}$ ce qui s'écrit :

$$(AB)\quad\begin{cases}x=-2-4t\\y=1+2t\\z=t\end{cases}\quad \text{pour } t\in\mathbb{R}.$$

b) pour la demi-droite $[AB)$, il faut d'abord déterminer la valeur du paramètre t qui donne le point A, puis vérifier si t doit ensuite augmenter ou diminuer.

$z_A=0=t$ et $z_B=1$ donc t doit augmenter à partir de 0, donc $t\in[0,+\infty[$.

c) pour le segment $[AB]$ on aura donc $t\in[0,1]$.

d) et pour la demi-droite $[BA)$ on aura $t\in]-\infty,0]$.

3) Les représentations paramétriques suivantes sont-elles associées à une même droite ?

(D_1) : $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t \\ z = 1-3t \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et (D_2) : $\begin{cases} x = 3-6s \\ y = -3s+2 \\ z = 9s-5 \end{cases}$ pour $s \in \mathbb{R}$

Si les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, alors les deux droites sont différentes.

Les coordonnées d'un vecteur directeur se lisent devant le paramètre.

Pour (D_1) on lit $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et pour (D_2) on peut lire $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

On constate alors que $-3\vec{u} = \vec{v}$ donc les vecteurs sont colinéaires.
On sait maintenant que les droites sont parallèles, donc si elles ont un point commun, alors elles sont confondues. Sinon ce sont deux droites strictement parallèles.

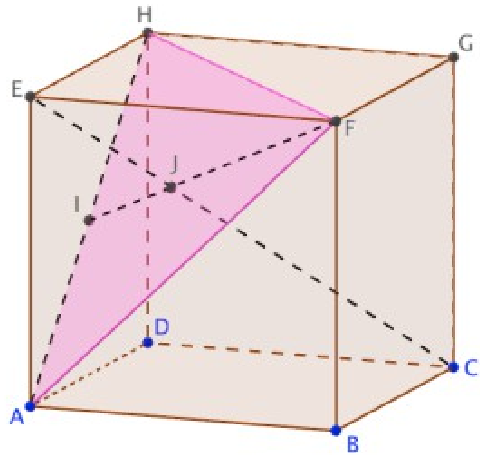
Il faut donc soit résoudre le système à deux inconnues suivant $\begin{cases} 2t-1=3-9s \\ t=-3s+2 \\ 1-3t=9s-5 \end{cases}$,

soit choisir un point de (D_1) et montrer qu'il appartient à (D_2).

4) On donne $A(1;4;-2)$ et $B(2;-3;4)$ dans un repère quelconque $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) et du plan xOy il faut établir une représentation paramétrique de la droite (AB), puis utiliser le fait que le plan xOy est caractérisé par $z = 0$. Ceci permet de trouver la valeur correspondante du paramètre puis de calculer les autres coordonnées.

Exercice n°8 : ABCDEFGH est un cube.



Soit I le milieu de $[AH]$ et J le point tel que $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}$.

Démontrer que les points E , J et C sont alignés.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires, donc il est possible de décomposer les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ en fonction de ces trois vecteurs.

On va utiliser la décomposition suivante : $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ}$

On a donc besoin d'exprimer $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Pour cela, il faut utiliser la règle du parallélogramme, appliquée au triangle FAH :

$\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FH} = 2\overrightarrow{FI}$ donc $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} = 2\overrightarrow{FI}$ soit $-\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{FI}$

d'où $2\overrightarrow{FI} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.

Vous devriez maintenant être capable d'exprimer $\overrightarrow{EJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Pour $\overrightarrow{EC}$, c'est beaucoup plus simple.

Puis il faut mettre en évidence le fait qu'ils soient colinéaires.