Nombres complexes et vecteurs.

1) Complexes et vecteurs :

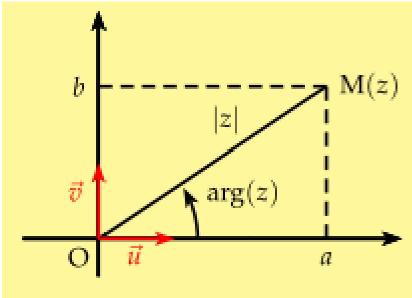
Définition 1 : Le plan complexe est rapporté à un repère **orthonormé direct** $(O;\vec{u};\vec{v})$.

i) Si le point M du plan complexe a pour affixe $z_M = a + i\,b$ alors :

Le vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a également pour affixe z_M :

on écrit alors : $z_{\overrightarrow{OM}} = a + i\,b$.

On a également : $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z_M)$ et $OM = |z_M|$.



ii) Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points du plan complexe, alors on a :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
- $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$
- $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$

Exemples : On donne $A(2+i)$ et $B(-1-2i)$.

Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, la distance AB et l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.

On a : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1 - 2i - 2 - i = -3 - 3i$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

On a : $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(9+9)} = 3\sqrt{2}$ donc $AB = 3\sqrt{2}$.

On a : $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ qui donne $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$ et donc $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = -\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$.

Exercice n°1 : On reprend les mêmes points.

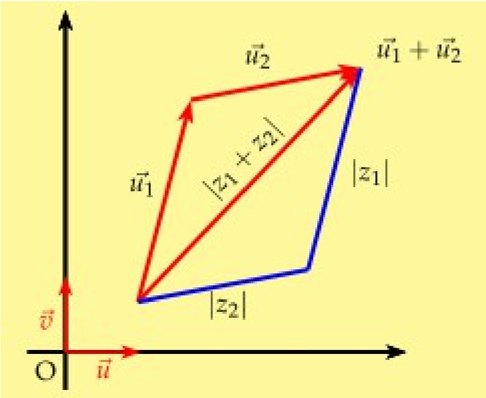
1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe vérifiant $|z - z_A| = 3$.

2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe vérifiant $|z - z_A| = |z - z_B|$.

2) Sommes de vecteurs :

Propriété 1 :

Soient $\vec{u_1}(z_1)$, $\vec{u_2}(z_2)$ et $\vec{u_3}(z_3)$ tels que : $\vec{u_3} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$.



On en déduit que : $z_3 = z_1 + z_2$

et l'inégalité triangulaire : $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Remarque : De même, le vecteur $\vec{u}_3 = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2$ a pour affixe $z_3 = \alpha z_1 + \beta z_2$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3) Angles orientés :

Propriété 2 : Pour tous points A , B , C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ on a :

$$\overline{(\vec{AB}, \vec{CD})} = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right).$$

preuve : D'après les règles sur les angles orientés :

$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w})$ on a les égalités suivantes :

$$(\vec{AB}, \vec{CD}) = (\vec{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{CD}) = (\vec{u}, \vec{CD}) - (\vec{u}, \vec{AB})$$

donc $(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg(z_{\vec{CD}}) - \arg(z_{\vec{AB}}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

Exercice n°2 : On considère les points A, B, C, D, E et F d'affixes respectives :

$$a=1+5i\ ,\ b=7-2i\ ,\ c=4+\frac{3}{2}i\ ,\ d=5+6i\ ,\ e=\frac{15+9i}{2}\ \text{ et }\ f=\frac{1-3i}{2}.$$

1) Calculer les modules de $c-a$ et $c-d$.
Interpréter géométriquement le résultat.

2) Calculer les modules de $a-e$, $e-b$, $b-f$ et $f-a$.
Interpréter géométriquement le résultat.

3) Calculer $Z=\frac{e-a}{f-a}$ et un argument de Z.
En déduire la nature du quadrilatère $AEBF$.

4) Colinéarité et orthogonalité :

Propriété 3 : Alignement de 3 points distincts ou parallélisme de deux droites.

i) A, B, C distincts sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires non nuls $\Leftrightarrow$ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$.

ii) Pour $A\neq B$ et $C\neq D$:

(AB) et (CD) parallèles $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires non nuls $\Leftrightarrow$ $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$.

preuve : Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires alors $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv 0\,[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\pi\,[2\pi]$.

On en déduit que $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=0$ ou $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\pi$.

Même chose avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ pour les deux droites parallèles.

Exercice n°3 : Les points $E(-3+5i)$, $F(7+i)$ et $G(22-5i)$ sont-ils alignés ?

Propriété 4 : Pour montrer l'orthogonalité de deux droites.

Pour $A \neq B$ et $C \neq D$: $(AB) \perp (CD) \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$ (imaginaire pur)

preuve : Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

On en déduit que $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

5) Nature d'un triangle :

Pour montrer qu'un triangle ABC est :

- **isocèle** en A : $AB = AC \iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A|$
- **équilatéral** : $AB = AC = BC$ ou $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = +/- \dfrac{\pi}{3}$

  donc $\iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$

  ou $\iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A|$ et $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = +/- \dfrac{\pi}{3}$

  ou $\iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = +/- e^{i\frac{\pi}{3}}$

- **rectangle** en A : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur

- **rectangle et isocèle** en A : $AB = AC$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = +/- i$.

Exercice n°4 : On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$Z_A = -1 + 2i$, $Z_B = 4 + 3i$, $Z_C = 4 - 3i$ et $Z_D = 3i$.

1) Représenter les quatre points A, B, C et D dans le plan complexe.

2) Calculer $\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$ puis $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$, puis donner l'écriture exponentielle de ces nombres.

   En déduire la nature des triangles ACD et BCD.

3) Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice n°5 : Racines n$^{\text{ièmes}}$ de l'unité : exercice n° 65 page 307.