Nombres complexes : écritures trigonométriques et exponentielles.

Rappels :

A l'**écriture algébrique** $z=a+ib$ d'un complexe z quelconque est associé un point M dans le **plan complexe** muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On dit que le point $M(z)$ a pour **affixe** le nombre **complexe** z dans ce repère.

On pourrait également dire que le point $M(a,b)$ a pour **coordonnées** le couple de **réels** (a,b) dans ce même repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On peut également repéré un point M dans le plan grâce aux deux nombres réels suivants :

- OM la distance positive entre les points O et M
- l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ qui peut être négatif

On appelle ce système de repérage les **coordonnées polaires**, souvent notées $M(r,\theta)$ avec $r>0$.

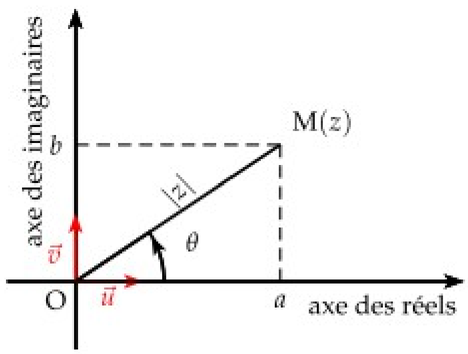
Le problème, c'est qu'on peut avoir deux points identiques avec des valeurs de la seconde coordonnées polaire θ différentes. A moins d'imposer $\theta\in[0\,,2\pi[$ ou $\theta\in]-\pi\,,\pi]$.

L'équivalent avec les nombres complexes, c'est leur écriture sous **forme trigonométrique**, qui met en relief le module et l'argument du complexe z.

Module et **argument** d'un complexe z donné par son écriture algébrique : $z=a+ib$.

On appelle module de z la distance OM, c'est-à-dire le nombre réel noté $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

On a en outre $z\bar{z}=|z|^2=a^2+b^2$.



Et pour $z\neq 0$, on appelle argument de z, noté $\arg(z)$, toute mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$ tel que :

$$\begin{cases}\cos\theta \equiv \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta \equiv \dfrac{b}{|z|}\end{cases} \text{ avec } \theta=\arg(z)[2\pi]$$

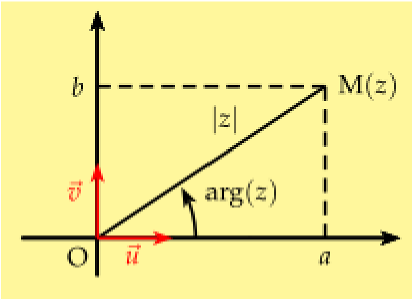
1) Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

Définition 1 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit z un complexe non nul d'écriture algébrique :

$z = a + i\,b$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

On appelle **forme trigonométrique** de z ,
son **unique** écriture sous la forme :



$$z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z)\ (2\pi)$$

Exercice n°2 : 1) Écrire les complexes suivants sous forme trigonométrique :

$z_1 = 1 - i$, $\overline{z_1}$, $-z_1$ et $\overline{-z_1}$

$z_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $\overline{z_2}$, $-z_2$ et $\overline{-z_2}$

2) Donner l'écriture algébrique des complexes suivants :

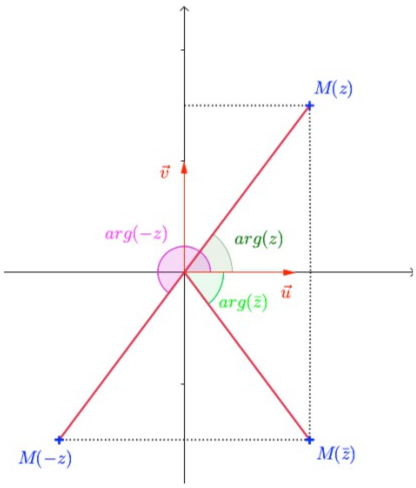
$$z_3 = 4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) \text{ et } z_4 = -2\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right)$$

Propriété 1 : Pour tout complexe non nul z on a les relations suivantes :

$$|-z| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(-z) = \arg(z) + \pi\ (2\pi)$$

$$|\overline{z}| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ (2\pi)$$

preuve : faire une figure.



Propriété 2 : Pour tous complexes non nuls z et z', on a les relations suivantes :

$$|zz'|=|z|\,|z'| \quad \text{et} \quad \arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\ (2\pi)$$

$$|z^n|=|z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n)=n\arg(z)\ (2\pi) \text{ pour tout entier } n$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\ (2\pi)$$

Rappels : Pour tous réels a et b on a :

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \ \text{ et } \ \sin(a+b)=\cos a\sin b+\cos b\sin a.$$

Preuve : Soient $z_1=r_1(\cos a+i\sin a)$ et $z_2=r_2(\cos b+i\sin b)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= r_1r_2(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)\\
&= r_1r_2(\cos(a)\cos(b)+i\cos(a)\sin(b)+i\sin(a)\cos(b)+i^2\sin(a)\sin(b))\\
&= r_1r_2(\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)+i(\cos(a)\sin(b)+\cos(b)\sin(a)))\\
&= r_1r_2(\cos(a+b)+i\sin(a+b))
\end{aligned}$$

Par identification on obtient : $|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|$ et $\arg(z_1z_2)=a+b=\arg(z_1)+\arg(z_2)$.
On démontre que $|z_1{}^n|=|z_1|^n$ et $\arg(z_1{}^n)=n\arg(z_1)\ (2\pi)$ par récurrence à partir de la propriété du produit que l'on vient de démontrer. Il reste à initialiser au mieux.

Pour le quotient, on pose $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$, et on a donc $z_1=Z\times z_2$. En utilisant les règles précédentes pour le produit, on obtient :

$|z_1|=|Z|\times|z_2|$ ce qui donne : $|Z|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

et $\arg(z_1)=\arg(Z)+\arg(z_2)$ ce qui donne : $\arg(Z)=\arg(z_1)-\arg(z_2)\ (2\pi)$.

Exercice n°3 : Donner le module et l'argument du nombre complexe $z=\sqrt{3}+i$.

2) Forme exponentielle d'un nombre complexe :

i) Pour rappel, la fonction exponentielle a été définie comme l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $f'(x)=f(x)$ et $f(0)=1$.

ii) De même, la fonction $f_k(x)=e^{kx}$ est la seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
$f'_k(x)=k\,f(x)$ et $f_k(0)=k$.

iii) Posons alors $\phi(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$.

On a alors ϕ : $\begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{C} \\ \theta\mapsto\phi(\theta) \end{array}$ à valeurs complexes.

La fonction ϕ vérifie alors :

$\phi(0)=\cos 0+i\sin 0=1$ et $\phi'(\theta)=-\sin\theta+i\cos\theta=i(\cos\theta+i\sin\theta)$, soit $\phi'(\theta)=i\,\phi(\theta)$.

La fonction ϕ se comporte donc comme les fonctions f_k précédentes, en choisissant une valeur complexe pour k, c'est-à-dire $k=i$!

Pour cette raison, on pose $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, qui permet de définir l'exponentielle complexe.
Le complexe $e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

Définition 2 : On appelle **forme exponentielle** d'un complexe non nul z son unique écriture sous la forme :

$$z=r\,e^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta) \text{ avec } r=|z| \text{ et } \theta=\arg(z)\ (2\pi)$$

Exemples : les points cardinaux du cercle trigonométrique, et quelques autres.

Remarque : La relation $e^{i\pi}+1=0$ contient les nombres qui ont marqué les mathématiques :

0 et 1 pour l'arithmétique, π pour la géométrie, i pour les nombres complexes et le nombre transcendant e pour l'analyse (l'étude du continu et des passages à la limite).

Exercice n°4 : 1) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

$$z_1 = -3i \qquad z_2 = -2 \qquad z_3 = -\frac{5}{i}$$

2) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

$$z_4 = e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad z_5 = 4\,e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad z_6 = -3\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

Propriété 3 : **Formules d'Euler.**

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

preuve : c'est une conséquence de la définition de : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Exemple d'utilisation : pour linéariser $\cos^2\theta$ ou $\sin^2\theta$.

On a $\cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{\left(e^{i\theta}\right)^2 + 2\,e^{i\theta}\times e^{-i\theta} + \left(e^{-i\theta}\right)^2}{4} = \frac{e^{i2\theta}+2+e^{-i2\theta}}{4}$

donc $\cos^2\theta = \frac{1}{2}\times\left(1+\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}\right) = \frac{1}{2}\times(1+\cos 2\theta)$ et $\cos^2 = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$.

Exercice n°5 : Linéariser $\sin^2\theta$ puis $\cos^3\theta$.

Propriété 4 : Pour tous complexes non nuls $z = r\,e^{i\theta}$ et $z' = r'\,e^{i\theta'}$ on a :

$$\bar{z} = r\,e^{-i\theta} \qquad z\,z' = r\,r'\,e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,e^{-i\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\,e^{i(\theta-\theta')}\ ;$$

La relation évidente $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta n}$ se traduit de manière beaucoup moins évidente, en une formule célèbre:

Formule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ pour tout entier n.

Et donc aussi : $z^n = r^n e^{in\theta}$ pour tout entier n.

Exemple d'utilisation : Pour retrouver certaines formules trigonométriques.

On a $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta + (i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta$.

D'après la formule de Moivre, on a aussi : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$.

Or deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

On obtient donc : $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2i\cos\theta\sin\theta$.

Exercice n°6 : Exprimer $\cos^3\theta$ et $\sin^3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.