

Introduction sur les nombres complexes

1) Introduction :

Justification simpliste de la découverte des nombres complexes...

On a commencé par décider que les nombres entiers existaient, comme ça on pouvait enfin compter ses amis et l'écrire simplement. Mais bon, il nous a quand même fallu du temps pour écrire qu'on avait pas d'amis ! Le zéro fut enfin né, tout beau tout rond. Et on pouvait même lui ajouter l'unité, pour obtenir le suivant, puis recommencer et obtenir le suivant du suivant, et ainsi de suite...

Ces nombres constituent l'ensemble des **entiers naturels** $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;\dots;n;\dots\}$.

Mais l'équation $x+6=2$ n'admet pas de solution dans \mathbb{N} .

Alors on créa les **opposés**, donc l'ensemble des **entiers relatifs** $\mathbb{Z}=\{\dots;-2;-1;0;1;2;3;\dots\}$, un ensemble qui contient les précédents, et dans lequel on peut faire des soustractions et donner la solution de l'équation précédente, c'est-à-dire $x=-4$.

Mais l'équation $3x=7$ n'admet pas de solution dans \mathbb{Z} .

Alors on créa les inverses, donc l'ensemble des **nombres rationnels** \mathbb{Q} défini par :

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}; a\in\mathbb{Z} \text{ et } b\in\mathbb{N}^* \text{ et } \text{pgcd}(a,b)=1\right\}$$

Dans cet ensemble, l'équation précédente a pour solution le rationnel $x=\frac{7}{3}$.

Mais l'équation $x^2=2$ n'admet pas de solution dans \mathbb{Q} .

Mais avec l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} , on pourra écrire $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$.

Mais l'équation $x^2+1=0$ n'admet pas de solution dans \mathbb{R} .

Donc on va construire un ensemble qu'on appelle \mathbb{C} (complexe) dont l'élément principal ajouté est le nombre i tel que $i^2=-1$. On obtient donc comme solutions $x=i$ ou $x=-i$.

La démarche naturelle consiste à chercher un ensemble plus grand qui contient l'ancien, qui vérifie les mêmes propriétés et qui puisse être représenté.

1) Construction des nombres complexes :

Définition 1 :

On admet qu'il existe un ensemble de nombres, noté \mathbb{C} , appelé ensemble des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :

- \mathbb{C} **contient** \mathbb{R} ;
- Dans \mathbb{C} on définit une **addition** et une **multiplication** qui suivent les **mêmes règles** de calcul que dans \mathbb{R} ;
- Il existe dans \mathbb{C} un nombre i tel que $i^2 = -1$;
- Tout élément z de \mathbb{C} s'écrit de *manière unique* sous la forme :

$$z = a + ib \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels.}$$

Cette écriture est appelée **forme algébrique**.

- a est la **partie réel** de z , notée $a = \Re(z)$;
- b est la **partie imaginaire** de z , notée $b = \Im(z)$.

Remarque : Soit le nombre complexe $z = a + ib$.

- Si $b = \Im(z) = 0$, alors $z = a$ est un nombre réel ;
- Si $a = \Re(z) = 0$, alors $z = ib$ est appelé **imaginaire pur**.

Exemples de nombres complexes :

$$z_1 = 3 - 2i, \text{ pour lequel } \Re(z_1) = 3 \text{ et } \Im(z_1) = -2$$

$$z_2 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, \text{ pour lequel } \Re(z_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \Im(z_2) = \frac{1}{2}$$

$$z_3 = i \frac{\pi}{4}, \text{ pour lequel } \Re(z_3) = 0 \text{ et } \Im(z_3) = \frac{\pi}{4}, \text{ qui est donc un imaginaire pur.}$$

Remarque :

- Un complexe z est nul si et seulement si $\Re(z) = \Im(z) = 0$;
- Deux complexes z et z' sont égaux si et ssi $\Re(z) = \Re(z')$ et $\Im(z) = \Im(z')$.

Exercice n°1 : Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4) \quad z_2 = (3 - 2i)(-4 + 5i) \quad z_3 = (2 - 3i)^2 \quad z_4 = (2i)^3$$

$$z_5 = 5 - \frac{3}{i^3} \text{ puis } z_6 = (1 - i)^5 \text{ en utilisant le binôme de newton}$$

Remarque : Comme $i^2 = -1$, alors $i \times i = -1$, et donc $\frac{1}{i} = -i$.

2) Représentation géométrique dans le plan complexe :

Propriété 1 : A tout nombre complexe $z = x + iy$, on peut faire correspondre un unique point $M(x; y)$ dans un plan orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On dit que z est l'**affiche** du point M . On écrit alors $M(z)$

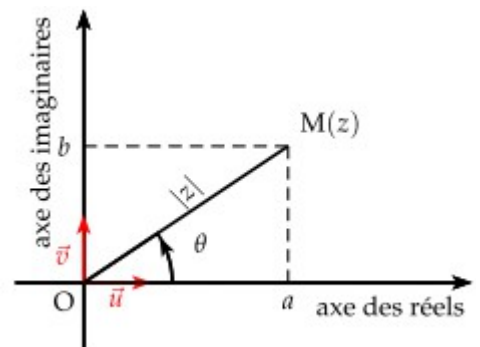
Inversement, à tout point $M(x; y)$ du plan on associe un unique nombre complexe $z = x + iy$ qui correspond alors à l'affiche du point $M(z)$.

Module et argument d'un complexe z donné par son écriture algébrique : $z = a + ib$.

On appelle module de z la distance OM ,
c'est-à-dire le nombre réel noté $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\text{On a en outre } z \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$$

Et pour $z \neq 0$, on appelle argument de z , noté $\arg(z)$, toute mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{u}; \vec{OM})$ tel que :



$$\begin{cases} \cos \theta \equiv \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta \equiv \frac{b}{|z|} \end{cases} \text{ avec } \theta = \arg(z) [2\pi]$$

Attention !

Pas de i dans les coordonnées.

Les coordonnées d'un point sont toujours des nombres réels :

Le point $M(3;-2)$ a pour affixe le nombre complexe $z_M = 3 - 2i$.

Exercice n°2 :

1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 1 + i$

b) $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

c) $z_3 = -4 + 3i$

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points $M(z)$ dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée :

a) $|z| = 3$

b) $\Re(z) = -2$

c) $\Im(z) = 1$

Nombres complexes et ordre :

Il est toujours possible de comparer deux nombres réels : on dit que \mathbb{R} est un ensemble totalement ordonné.

En revanche, il n'est pas possible de comparer deux nombres complexes en général.

Cela reviendrait à être capable de dire qu'un point est plus grand qu'un autre, ce qui ne paraît pas concevable. Essayez !

En fait si l'on suppose i positif alors $i \geq 0$ donc $i^2 \geq 0$!

Et si l'on suppose $i \leq 0$ alors $i^2 \geq 0$!

Il faut donc oublier toute tentative d'inéquations dans \mathbb{C} .

Un nombre complexe n'est donc pas une quantité, mais plus que ça ! Deux quantités.
Une quantité dans deux directions orthonormales.

Ce que l'on pourra bien mesurer et comparer, c'est le module.

Puis il faudra ensuite préciser l'argument pour positionner correctement le point correspondant.

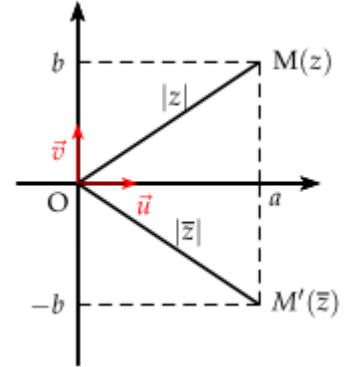
Encore deux quantités !

3) Conjugué d'un complexe :

Définition 2 : Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$.
On appelle le conjugué de z , le nombre noté \bar{z} tel que $\bar{z} = a - ib$.

Interprétation géométrique :

Le point $M'(\bar{z})$ d'affixe \bar{z} est le symétrique du point $M(z)$ d'affixe z par rapport à l'axe des abscisses.



Conséquence : Comme $(a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab + b^2 = a^2 + b^2$ on a :

$$z \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2. \text{ Et donc } z \bar{z} \in \mathbb{R}, \text{ ce qui n'est pas courant dans } \mathbb{C}.$$

Cette égalité permet de rendre réel un dénominateur.

Exercice n°3 :

1) Déterminer la forme algébrique des complexes $z_1 = \frac{2}{4-i}$ et $z_2 = \frac{3-i}{2+i}$.

2) Résoudre l'équation $z = (3-i)z + 2$.

Exercices permettant de montrer qu'un complexe avec un dénominateur vraiment complexe, peut toujours s'écrire avec un dénominateur réel.

Propriété 2 : Soit z un nombre complexe et \bar{z} son conjugué.

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \text{ et } z \text{ est imaginaire pur s'écrit : } z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0.$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) \text{ et } z \text{ est réel s'écrit : } z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}.$$

Grâce à son conjugué, on peut voir si un complexe est réel ou imaginaire pur.

Toutes les opérations algébriques fonctionnent bien avec la conjugaison.

Le conjugué de la somme, de la différence, du produit, du quotient ou d'une puissance se font naturellement.

Règle de calculs : Pour tout complexes z et z' on a :

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}' \qquad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}' \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \text{ si } z' \neq 0$$

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

preuve :

$$z = a + ib \text{ et } z' = a' + ib' \text{ pour } \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}' ; \text{ puis } \overline{z^n} = \bar{z}^n \text{ par récurrence.}$$

Exercice n°4 :

1) Donner la forme algébrique du conjugué du complexe $z = \frac{3-i}{1+i}$.

2) Dans le plan complexe, M est le point d'affixe $z = x + iy$, où x et y sont des réels.

A tout complexe $z \neq 1$ on associe le complexe $Z = \frac{5z-2}{z-1}$.

a) Exprimer $Z + \bar{Z}$ en fonction de z et \bar{z} .

b) Démontrer que « Z est un imaginaire pur » équivaut à « M est un point d'un cercle privé d'un point », cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Équations du second degré :

Les nombres complexes ont été créés pour qu'une équation du second degré ait toujours des solutions. Par suite, toutes les équations polynomiales auront des solutions dans \mathbb{C} .

Propriété 3 : Tout équation du second degré dans \mathbb{C} admet toujours deux solutions distinctes ou confondues.

Si cette équation est à coefficients réels : $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et $c \in \mathbb{R}$

Elle admet comme solutions dans \mathbb{C} :

i) Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

ii) Si $\Delta = 0$, une solution réelle double : $z_0 = -\frac{b}{2a}$

iii) Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Comparaisons avec le cas réel :

1) L'équation $-2x^2 + 12x - 18 = 0$ admet pour solution la racine double $x_0 = 3$.

Ce sera la même chose si l'on recherche les solutions de l'équation $-2z^2 + 12z - 18 = 0$ dans \mathbb{C} .

Et l'on pourra écrire : $-2x^2 + 12x - 18 = -2(x-3)^2$, de même que $-2z^2 + 12z - 18 = -2(z-3)^2$.

2) L'équation $-3x^2 + 3x + 6 = 0$ admet pour solutions les deux nombres réels $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.

Ce sera la même chose pour les solutions de l'équation $-3z^2 + 3z + 6 = 0$ dans \mathbb{C} .

Et on aura : $-3z^2 + 3z + 6 = -3(z+1)(z-2)$.

3) L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'admet pas de solutions dans \mathbb{R} puisque $\Delta = -3$.

Le trinôme $x^2 + x + 1$ ne possède pas de factorisation dans \mathbb{R} .

Par contre, dans \mathbb{C} , l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ va admettre deux solutions, qui sont deux nombres complexes conjugués :

En effet, $\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2$ et on aura alors : $z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ et $z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$.

On pourra alors écrire la factorisation suivante : $z^2 + z + 1 = a(z - z_1)(z - z_2)$ avec $a = 1$ ici.

Exercice n°5 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1) $3 - 7i - 2iz = 2z + 5$

2) $z^2 + \frac{5}{2} = z$

3) $z^4 - 16 = 0$

4) $z^2 - 4z + 5 = 0$ puis factoriser le trinôme $z^2 - 4z + 5$.

5) $z^2 - 2z + 2 = 0$ puis donner la factorisation.

Exercice n°6 : Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels.

Montrer que si $P(z) = 0$ alors $P(\bar{z}) = 0$.

Ce résultat est-il encore vrai si le polynôme est à coefficients complexes ?

Exercice n°7 : On considère l'équation $z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0$ dans \mathbb{C} .

1) Montrer que i est solution.

2) En déduire une factorisation du polynôme $z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i$.

3) Résoudre l'équation.