Lois de probabilités à densité.

Lorsque l'on s'intéresse à la durée d'une communication téléphonique, à la durée de vie d'un composant électronique ou la température d'un lac, la variable aléatoire X associée au temps ou à la température peut prendre une infinité de valeurs dans un intervalle donné.

On dit que cette variable X est **continue**, contrairement à la variable aléatoire du nombre de succès d'une loi binomiale, qui ne peut prendre que des valeurs **discrètes**.

On ne peut plus parler de probabilité d'événements car les événements élémentaires sont en nombre infini. **La probabilité d'une valeur isolée est alors nulle**.

On contourne cette difficulté en associant à la variable X un intervalle de $\mathbb{R}$ et en définissant une **densité de probabilité**, correspondant à une répartition sur cette intervalle.

1) Définitions :

Définition 1 : On appelle **densité de probabilité** d'une **variable aléatoire continue X**, toute fonction f **continue** et **positive** sur un intervalle I telle que :

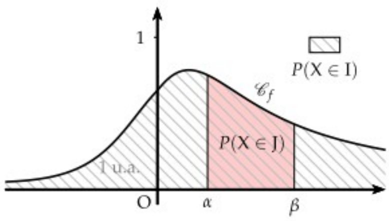
i) $P(X \in I) = \int_I f(t).dt = 1$

ii) Pour tout intervalle $J = [a\,;b]$ inclus dans I, on a : $P(X \in J) = \int_a^b f(t).dt$

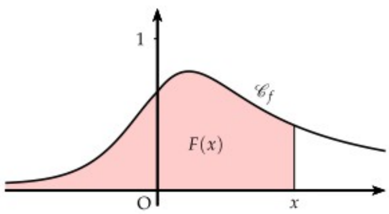
iii) D'autre part, la fonction F définie par : $F(x) = P(X \leqslant x)$ est appelée **fonction de répartition** de la variable X.

On a alors $F(x) = \int_a^x f(t).dt$ ou $F(x) = \lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^x f(t).dt$

Remarques :



Comme la fonction f est continue et positive, la probabilité $P(X \in I)$ correspond à l'aire sous la courbe de C_f. Elle vaut 1 u.a.



La probabilité $P(X \in [\alpha\,;\beta])$ correspond à l'aire sous la courbe entre les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = \beta$.

Comme la probabilité que X prenne une valeur isolée est nulle, que l'intervalle J soit ouvert ou fermé importe peu.
Ainsi : $P(X \in [\alpha\,;\beta]) = P(X \in [\alpha\,;\beta[) = P(X \in]\alpha\,;\beta]) = P(X \in]\alpha\,;\beta[)$

Exercice n°1 : On considère la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}1+x & \text{si } -1\leqslant x<0\\ 1-x & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

1) Tracer la représentation graphique de f.
2) Montrer que f définie bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3) Soit X la variable aléatoire de densité f. Déterminer $P\left(X\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right]\right)$.

Définition 2 : L'**espérance mathématique** d'une **variable aléatoire continue** X de densité f sur un intervalle I, est :

$$E(X)=\int_I t\times f(t).dt$$

Exercice n°2 : Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X de l'exercice 1, ainsi que l'expression de la fonction de répartition associée F.

2) Loi uniforme : densité homogène.

Définition 3 : Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** dans l'intervalle $I=[a;b]$ lorsque f **est constante** sur cet intervalle.
On en déduit alors la fonction f : $f(t)=\frac{1}{b-a}$.

Conséquence : Pour tout intervalle $J=[\alpha;\beta]$ inclus dans I, on a alors :

$$P(X\in J)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}=\frac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}$$

La probabilité est donc proportionnelle à la longueur de l'intervalle considéré.

Exemple : On choisit un nombre réel au hasard dans l'intervalle $[0;5]$.
On associe à X le nombre choisi.
Quelle est la probabilité que ce nombre soit supérieur à 4 ? compris entre e et π.

$P(X>4)=\frac{1}{5}$ et $P(e\leqslant X\leqslant \pi)=\frac{\pi-e}{5}\approx 0,085$

Propriété : Espérance mathématique de la loi uniforme.

Si X est une variable aléatoire continue suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$, alors son espérance vaut :

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

Preuve :

D'après la définition de l'espérance on a :

$$E(X)=\int_a^b \frac{t}{b-a}\,dt=\left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

Remarque : Dans l'exemple précédent, on trouve $E(X)=2{,}5$, ce qui est logique.

Exercices n° 3 et 4 : numéros 2 et 3 de la feuille d'exercices.

Exercices n° 5 à 8 : n° 13 page 413, puis n° 18, 19 et 20 page 414.

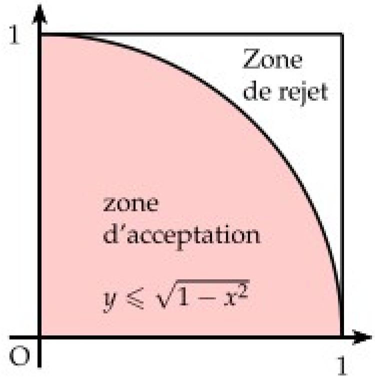
Application : Méthode de Monte-Carlo.

C'est une méthode probabiliste très utilisée pour la résolution approchée de problèmes variés allant du calcul d'aires et de volumes à la physique des particules.

Utilisons cette méthode pour déterminer une valeur approchée de π .

1) Par la méthode du rejet :

On admet, lors du tirage au hasard d'un point dans un carré de côté 1 , que la probabilité de tirer un point dans un domaine situé dans ce carré unité est proportionnelle à l'aire de ce domaine. Comme il s'agit du carré unité, cette probabilité est donc égale à l'aire du domaine.



On tire un grand nombre de points (par exemple 10 000).
D'après la **loi des grands nombres**, la probabilité p d'avoir un point dans la zone d'acceptation vaut :

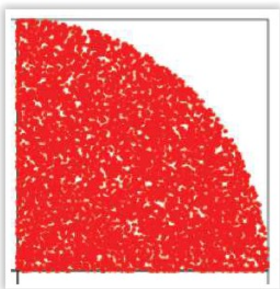
p = (nombre de points dans la zone d'acceptation) / (nombre total de points) = $\dfrac{\pi}{4}$

En statistiques, la **loi des grands nombres** (en anglais *Law of Large Numbers*) exprime le fait que les caractéristiques d'un échantillon aléatoire se rapprochent des caractéristiques statistiques de la population lorsque la taille de l'échantillon augmente.

La taille de l'échantillon à considérer ne dépend que faiblement de la taille de la population visée : que le sondage soit fait au Luxembourg ou aux États-Unis, il suffit, pour obtenir des précisions environ égales, de prendre des échantillons de tailles égales.

On peut alors écrire l'algorithme suivant en langage Python :

```python
# Méthode de Monte-CarLo par rejet
from random import random
from math import sqrt
n = int(input("Donner le nombre de points:"))
p = 0
for i in range(n):
    x = random()
    y = random()
    if y <= sqrt(1-x**2):
        p = p + 1
print("nombre de points =",p)
print("valeur approchée de pi =",4*p/n)
```



On obtient pour n = 10 000 :

```
>>>
nombre de points = 7917
valeur approchée de pi = 3.1668
>>>
```

La précision est de l'ordre de $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \approx 0{,}01$.

2) Par la méthode de l'espérance :

On choisit au hasard n valeurs de l'abscisse x d'un point M dans $[0;1]$.

On calcule la somme S des n valeurs prises par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

La moyenne des n valeurs de $f(x)$ est une valeur approchée de la valeur moyenne μ de la fonction f, donc de l'aire du quart de cercle.

Pour $a=0$, $b=1$ et $f(t)=\sqrt{1-t^2}$ on a :

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t).dt \Leftrightarrow \mu=\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt=\frac{\pi}{4}\approx\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

On peut alors écrire l'algorithme suivant en langage Python :

```python
# Méthode de Monte-Carlo par l'espérance
from random import random
from math import sqrt
n = int(input("Donner le nombre de points:"))
s = 0
for i in range(n):
    x = random()
    s = s + sqrt(1-x**2)
p = s/n
print("valeur approchée de pi =",4*p)
```

On obtient pour n = 10 000 :

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
valeur approchée de pi = 3.1298560982135206
>>>
```

Exercice n°9 : n° 67 page 424.

Exercice n°10 : Sur la méthode de Buffon...