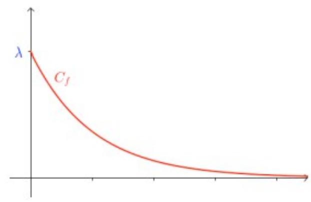
La loi exponentielle ou loi sans mémoire.

Définition 1 :

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ lorsque sa densité est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :



$$f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$$

Conséquences : On peut vérifier que :

- La fonction de répartition est : $F(x) = P(X \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

  En effet : $F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x f(t).dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1$.

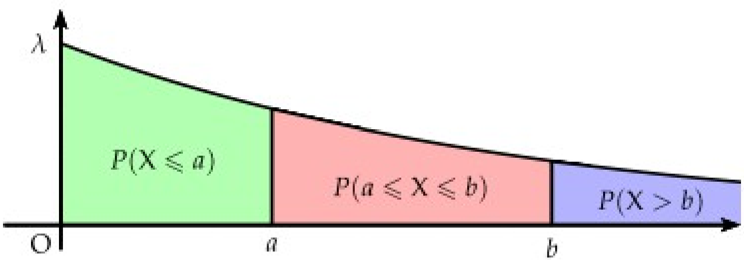
- f est bien une densité de probabilité, car la fonction f est **continue**, **positive** et :

$$\int_0^{+\infty} f(t).dt = \lim_{x \to +\infty} \left(\int_0^x f(t).dt\right) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - e^{-\lambda x}\right) = 1.$$

- On a donc $P(X \leqslant a) = F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$ pour tout $a \geqslant 0$.

- Par l'événement contraire, on a aussi : $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - F(a) = e^{-\lambda a}$.

- Si X se trouve dans $[a, b]$, on a : $P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$



Propriété 1 : Loi **sans mémoire**, ou sans vieillissement.

La loi exponentielle est une loi sans mémoire, c'est à dire que :

$\forall t > 0$ et $\forall h > 0$ on a : $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$.

preuve : On applique la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_{X\geqslant t}(X\geqslant t+h)=\frac{P(X\geqslant t \text{ et } X\geqslant t+h)}{P(X\geqslant t)}=\frac{P(X\geqslant t+h)}{P(X\geqslant t)}=\frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}=\frac{e^{-\lambda t}\times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda h}=P(X\geqslant h)$$

<u>*Remarque*</u> :

On dit que la durée de vie d'un appareil est sans mémoire ou sans vieillissement lorsque la probabilité que l'appareil fonctionne encore h années supplémentaires sachant qu'il fonctionne à l'instant t, **ne dépend pas de t**.
On admettra que la loi exponentielle est la seule loi sans vieillissement.
Ceci est valable si l'appareil n'est pas sujet à un phénomène d'usure.
On retrouve cette propriété en ce qui concerne la durée de vie d'un noyau radioactif.

Propriété 2 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Alors son **espérance mathématique** est : $E(X)=\frac{1}{\lambda}$.

préalable à la démonstration :

Si une fonction g est dérivable, alors une primitive de sa dérivée g' est la fonction g elle-même. Ainsi on aura $\int_a^b g'(t).dt=[g(t)]_a^b$.

preuve de la propriété 2 :

En posant $g(t)=t\,f(t)=\lambda\,t e^{-\lambda t}$, par définition de l'espérance, on a :

$$E(X)=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x g(t).dt\right)$$

Il faut donc trouver une primitive de la fonction g, et pour cela on dérive la fonction g :

$$g'(t)=\lambda\,e^{-\lambda t}-\lambda^2\,t\,e^{-\lambda t}=\lambda\,e^{-\lambda t}-\lambda\,g(t) \text{ donc } g(t)=e^{-\lambda t}-\frac{1}{\lambda}g'(t).$$

On a alors : $\int_0^x g(t).dt=\int_0^x\left(e^{-\lambda t}-\frac{1}{\lambda}g'(t)\right).dt=\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}-\frac{1}{\lambda}g(t)\right]_0^x=-\frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda}+g(t)\right]_0^x$

$$=-\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda x}+g(x)-1-g(0)\right)=-\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda x}+\lambda\,x\,e^{\lambda x}-1\right).$$

On pose $Y = -\lambda x$, donc si $x \to +\infty$ alors $Y \to -\infty$.

On a alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = \lim\limits_{Y \to -\infty} e^{Y} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \lambda x e^{-\lambda x} = \lim\limits_{Y \to -\infty} -Y e^{Y} = 0$.

Par somme et produit, on a alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x g(t).dt = \dfrac{1}{\lambda}$.

Exercice n°1 : La durée de vie, exprimée en heures, d'un petit composant électronique d'une carte d'anniversaire musicale est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0035$.

Sachant qu'un composant testé a fonctionné plus de 200 heures, calculer la probabilité qu'il tombe en panne avant 300 heures.

Exercice n°2 : La durée de vie d'un atome radioactif de carbone 14, exprimée en années, suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}00012$
(λ est appelée constante de désintégration).

1) Quelle est la durée de vie moyenne d'un tel atome ?

2) Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas désintégré au bout de 10 000 ans ?

Exercice n°3 :

La durée de vie d'un composant électronique, en années, est une variable aléatoire T qui suit une loi sans vieillissement de paramètre λ .
Une étude statistique a montré que pour ce type de composant, la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de $0{,}675$.

1) Calculer la valeur du paramètre λ arrondie à trois décimales.

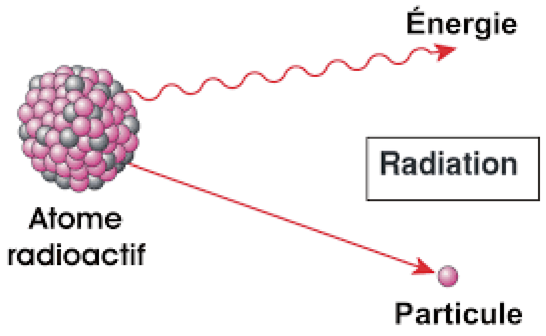
2) Quelle est la probabilité, à trois décimales près, que ce type de composant dure :

a) moins de huit ans b) plus de 10 ans
c) au moins huit ans, sachant qu'il fonctionne encore au bout de trois ans

3) Quelle est l'espérance de vie de ce composant ?

Application à la physique.

La désintégration radioactive est un phénomène aléatoire, c'est-à-dire que l'on ne peut pas, à l'échelle microscopique, dire quand un noyau va se désintégrer.
Néanmoins, à l'échelle macroscopique, on a pu établir que la durée de vie d'un noyau radioactif suit une loi sans vieillissement, c'est-à-dire une loi exponentielle de paramètre λ , appelé constante radioactive (en s^{-1}) et qui caractérise un radionucléide.



En effet, soit N_0 le nombre de noyaux radioactifs tous identiques initialement présents dans l'échantillon. Au bout d'un temps t , la population de noyaux a diminué. Soit $\mathrm{N}(t)$ le nombre de noyaux radioactifs tous identiques présent dans l'échantillon à la date t .
Le nombre moyen de désintégration (variation de population $\Delta\mathrm{N}$) est proportionnelle à la population existante $\mathrm{N}(t)$ et à la durée de mesure Δt .

On a donc : $\Delta N = -\lambda \times \mathrm{N}(t) \times \Delta t$ où λ est la constante de proportionnalité.

Si la durée Δt tend vers 0 , on obtient : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\Delta \mathrm{N}(t)}{\Delta t} = -\lambda \times \mathrm{N}(t)$ ce qui s'écrit aussi sous la forme d'une équation différentielle : $\dfrac{dN}{dt} = -\lambda\, \mathrm{N}$ ou encore $\mathrm{N}'(t) = -\lambda\, \mathrm{N}(t)$.

<u>Résolution de l'équation différentielle</u> :

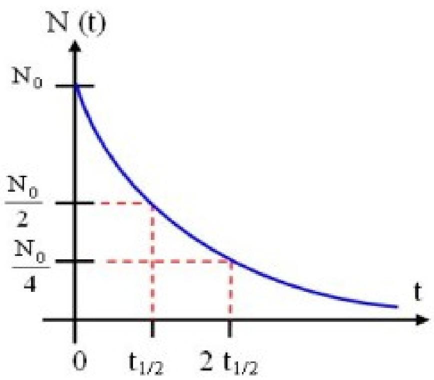
On cherche une fonction $f(t)$ vérifiant $f'(t) = -\lambda\, f(t)$ ou encore $f'(t) + \lambda\, f(t) = 0$.
Alors $f'(t)+\lambda f(t)=0 \;\Leftrightarrow\; e^{\lambda t} f'(t)+\lambda e^{\lambda t} f(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(e^{\lambda t} f(t)\right)'=0 \;\Leftrightarrow\; e^{\lambda t} f(t)=cste$
ce qui donne $f(t) = k\, e^{-\lambda t}$, et dans notre cas $\mathrm{N}(t) = k\, e^{-\lambda t}$ avec $\mathrm{N}(0) = \mathrm{N}_0 = k$;
finalement, on obtient : $\mathrm{N}(t) = \mathrm{N}_0\, e^{-\lambda t}$.

La **durée de vie moyenne** du radionucléide est donné par $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$ et alors $\mathrm{N}(t) = \mathrm{N}_0\, e^{-\frac{\lambda t}{\tau}}$.

On appelle **demi-vie** la durée $t_{\frac{1}{2}}$ au bout de laquelle la population initiale est divisée par 2.

Or $\mathrm{N}\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{\mathrm{N}_0}{2}$ se traduit par $\dfrac{1}{2} = e^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}}$ d'où $-\ln 2 = -\lambda\, t_{\frac{1}{2}}$

ce qui donne $t_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2$.



Définition 2 :

Pour une variable aléatoire X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement, on appelle **demi-vie** la durée $t_{\frac{1}{2}}$ tel que $P\left(X \geqslant t_{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}$.

On obtient alors $t_{\frac{1}{2}}=\frac{\ln 2}{\lambda}$.

Remarque :

On parle de moyenne car certains noyaux se désintègrent plus vite que d'autres.

preuve :

$P\left(X \geqslant t_{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}$ se traduit par $e^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}$, et en passant au logarithme, on obtient :

$-\lambda t_{\frac{1}{2}}=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$ et donc $t_{\frac{1}{2}}=\frac{\ln 2}{\lambda}$.

On a par exemples :

$t_{\frac{1}{2}}(thorium\ 230)=7{,}5\times10^4$ années $\quad t_{\frac{1}{2}}(carbone\ 14)=5\,730$ ans

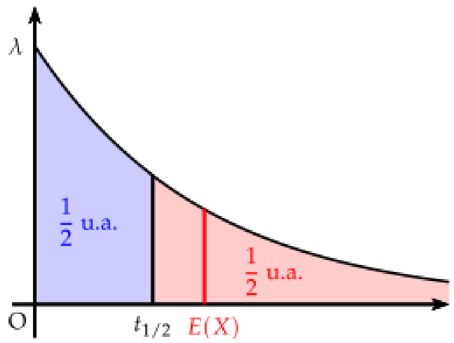
$t_{\frac{1}{2}}(iridium\ 194)=19$ heures $\quad t_{\frac{1}{2}}(iode\ 131)=8{,}1$ jours

Définition 3 : Pour une variable aléatoire X suivant une loi de durée de vie sans vieillissement, la **durée de vie moyenne** τ est donnée par l'espérance mathématique $E(X)$.

$$\tau=\frac{1}{\lambda} \text{ et donc } t_{\frac{1}{2}}=\tau\times\ln 2 \text{ ou encore } \tau=t_{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{\ln 2}\approx 1{,}44\ t_{\frac{1}{2}}$$

Remarque :

La demi-vie n'est pas égale à la durée de vie moyenne $\tau=E(X)$ car la courbe de densité de probabilité C_f n'est pas symétrique par rapport à la droite verticale d'abscisse $E(X)$.



- *Comparaison entre le discret et le continu* -

Discret	Continu
Univers Ω	Intervalle I ou $\mathbb{R}$
Événement A sous-ensemble de Ω	Événement J sous-ensemble de I
Probabilités p_i des événements élémentaires : $\sum p_i = 1$	Densité de probabilité f : $\int_I f(t).dt = 1$
Espérance de la variable aléatoire X : $E(X) = \sum p_i x_i$	Espérance de la variable aléatoire X : $E(X) = \int_I t\, f(t).dt$
Équiprobabilité : $P(A) = \dfrac{\textit{nbre de cas favorables}}{\textit{nbre de cas possibles}}$	Loi uniforme : $P(X \in J) = \dfrac{\textit{longueur de } J}{\textit{longueur de } I}$