Fonctions et limites

On étudie les limites d'une fonction aux bornes de son domaine de définition.
Ainsi, il sera possible de compléter les tableaux de variation de la fonction aux extrémités des flèches.

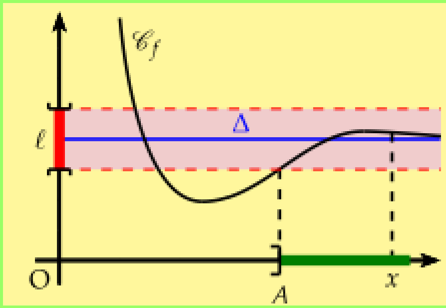
1) Limite d'une fonction à l'infini :

a) Limite finie en l'infini :

Définition 1 : On dit qu'une fonction f admet pour limite l en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de l que l'on veut, dès que x est suffisamment grand.

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

La droite Δ d'équation $y = l$ est dite **asymptote horizontale** à C_f .



Remarque : On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Exemples :

Les fonctions de référence $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ ont des limites nulles en $+\infty$.

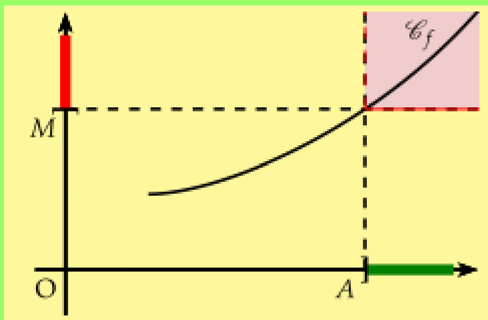
Leurs courbes admettent l'axe des abscisses pour asymptote horizontale.

b) Limite infinie en l'infini :

Définition 2 : On dit qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut, dès que x est suffisamment grand.

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

La droite Δ d'équation $y = l$ est dite **asymptote horizontale** à C_f .



Remarques :

- On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, ainsi que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante ;

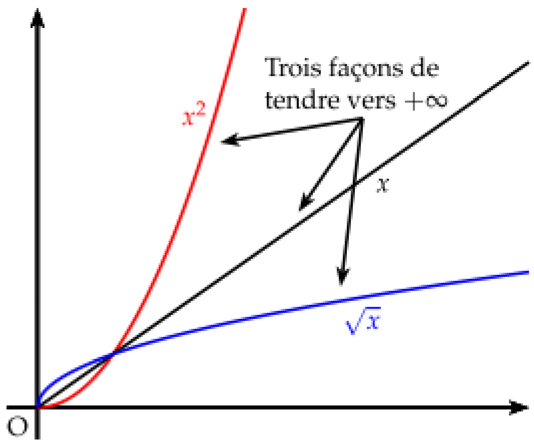
- Il existe des fonctions qui n'admettent pas de limite en l'infini ; les sinusoïdes par exemple.

Exemples :

- Les fonctions de référence $x \mapsto x$, $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
- La fonction $x \mapsto x^n$ a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si n est pair, et $-\infty$ en $-\infty$ si n est impair.

Une fonction peut tendre vers $+\infty$ en $+\infty$ de plusieurs façons. C'est le cas par exemple des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.

- $x \mapsto x^2$ tend "rapidement" vers l'infini. La concavité est tournée vers le haut.
- $x \mapsto x$ tend "moyennement" vers l'infini. Pas de concavité.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ tend "lentement" vers l'infini. La concavité est tournée vers le bas

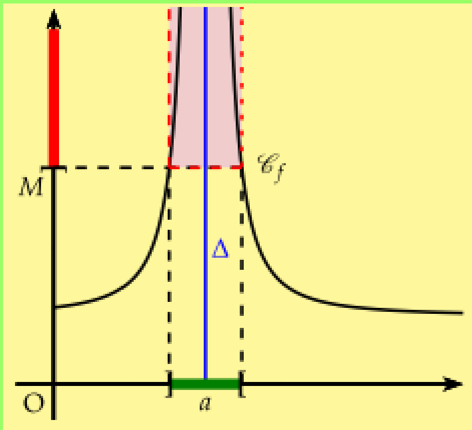


2) Limite infinie d'une fonction en un point :

Définition 3 : On dit qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ en a si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut, dès que x est suffisamment proche de a .

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

La droite Δ d'équation $x = a$ est dite **asymptote verticale** à C_f .



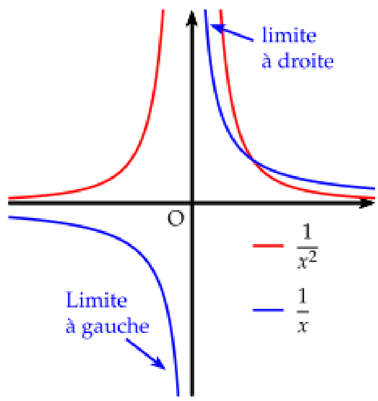
Remarque : On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

On peut aussi définir la limite à gauche ou à droite de $x = a$ lorsque la limite en $x = a$ n'existe pas. On notera alors :

limite à gauche : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$

limite à droite : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$

Exemple : La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ a pour limite $+\infty$ en 0. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0, mais admet une limite à gauche $(-\infty)$ et à droite $(+\infty)$ de 0.



3) Limite des fonctions élémentaires :

Limites en l'infini

$f(x)$	x^n	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	non défini	non défini

Limites en 0

$f(x)$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	non défini

4) Opérations sur les limites :

On a exactement les mêmes règles qu'avec les limites des suites, pour les sommes, les produits ou les quotients.

On rappelle les quatre formes indéterminées : $\infty - \infty$ $\quad 0 \times \infty \quad$ $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$

Pour la somme :

Exemples :

1) Limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x + 3 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

2) Limite en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par somme, on ne peut conclure} \\ \textbf{Forme indéterminée : } +\infty - \infty \end{array}$$

Pour le produit :

Exemples :

1) Limite en $-\infty$ de la fonction précédente : $f(x) = x^2 + x$

Pour lever la forme indéterminée, on change la forme de $f(x)$.

$$f(x) = x^2 + x = x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

On a alors avec le produit :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

2) Limite en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = x - \sqrt{x}$

On ne peut résoudre par la somme car c'est une forme indéterminée, on change alors la forme de $f(x)$

$$f(x) = x - \sqrt{x} = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

3) Limite à droite de 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \sin x = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par produit, on ne peut conclure} \\ \textbf{Forme indéterminée } 0 \times \infty \end{array}$$

Pour le quotient :

Exemples :

1) Limite en -2 de la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

On a le tableau de signes de $x + 2$:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2} 2x-1=-5 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x+2=0^+ \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x+2=0^-\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty\end{array}$$

On en déduit alors une asymptote verticale d'équation $x=-2$.

2) Limite en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x+2}$

Comme le numérateur et le dénominateur tendent vers l'infini en $+\infty$, nous avons une forme indéterminée : $\dfrac{\infty}{\infty}$. Il faut donc changer la forme de $f(x)$.

$$f(x)=\frac{2x+1}{3x+2}=\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\frac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}}$$

On a alors :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x}=2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3+\frac{2}{x}=3\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{2}{3}\end{array}$$

En conclusion :

Il existe donc quatre formes indéterminées (comme avec les limites de suites) où les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure. Dans les cas d'indétermination, il faudra chercher à mettre le terme du plus haut degré en facteur (pour les polynômes et les fonctions rationnelles), à simplifier, à multiplier par la quantité conjuguée (pour les fonctions irrationnelles), à utiliser un théorème de comparaison, à effectuer un changement de variable ...

<u>Limites des fonctions rationnelles en l'infini</u> :

En + ou - l'infini, seul compte le terme de plus haut degré d'un polynôme, de telle manière que l'on pourra écrire, par exemple :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+5x+2}{2x^3-8x^2+2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2x}=0$$

5) Limite d'une fonction composée :

Propriété 1 : Soit a , b et c trois nombres éventuellement infinis.
Soit f et u deux fonctions.
On considère alors la fonction composée $f \circ u : x \mapsto f(u(x))$. Alors on a :

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} u(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} f(x) = c \end{cases} \text{ alors } \lim\limits_{x \to a} f(u(x)) = c .$$

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ avec $f(x) = \sqrt{5 + \dfrac{1}{x^2}}$ ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ avec $g(x) = \cos\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

6) Théorèmes de comparaisons :

Propriété 2 : Soient f , g et h trois fonctions définies sur l'intervalle $I =]b ; +\infty[$ et $l \in \mathbb{R}$.

1) Théorème des gendarmes :

Si $\forall x \in I$ on a : $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l$.

2) Théorème de comparaison :

Si $\forall x \in I$ on a : $f(x) \geqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarques : On a des énoncés analogues pour les limites en $-\infty$ sur un intervalle de la forme $I =]-\infty ; b[$, ou pour des limites en un réel a sur un intervalle ouvert contenant a .

Exemples :

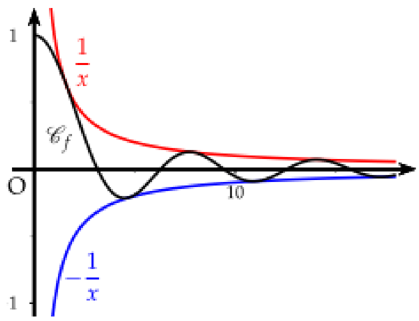
i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \cos x$

1) Pour tout x positif, on a :
$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc :

$$\forall x > 0 \quad -\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

or on sait que :
$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
D'après le théorème des Gendarmes, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

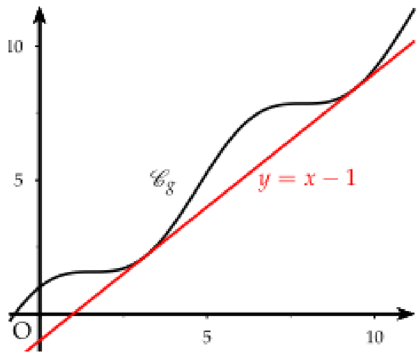


2) On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x \geqslant -1$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \cos x \geqslant x - 1$$

or on sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$



Exercice : limites en l'infini des fonctions suivantes :

i) $f(x) = x^3 + x\cos x$ ii) $g(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ iii) $h(x) = \dfrac{x\sin x}{x^2+1}$

Position relative d'une courbe et de son asymptote horizontale :

Imaginons une fonction f dont la courbe C_f est asymptote à la droite horizontale d'équation $y=\mathrm{l}$ en l'infini. Alors nécessairement on doit avoir $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\mathrm{l}$,
et donc $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-\mathrm{l})=0$.

La courbe est au-dessus de la droite lorsque $f(x)\geqslant \mathrm{l} \Leftrightarrow f(x)-\mathrm{l}\geqslant 0$,
et au-dessous lorsque $f(x)-\mathrm{l}\leqslant 0$.

Pour connaître la position de la courbe par rapport à son asymptote, il faut déterminer le signe de la limite $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-\mathrm{l})$:

Si $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-l)\geqslant 0$, alors la courbe est au-dessus de son asymptote,
et si $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-l)\leqslant 0$, alors la courbe est en-dessous de son asymptote.

Mais il se peut que ce ne soit ni l'un ni l'autre. Dans ce cas, la courbe oscille indéfiniment entre les deux positions.

Exercice :

1) Montrer que la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{5-4x}{2x+3}$ admet la droite d'équation $y=-2$ comme asymptote horizontale en $-\infty$ et $+\infty$.

2) Étudier la position relative de la courbe C_f avec son asymptote.

Exercice :

Démontrer que la droite d'équation $x=4$ est asymptote verticale à la courbe de la fonction définie par $g(x)=\dfrac{2x}{x-4}$ (étudier les limites à droite et à gauche de 4).

Exercice : Soit la fonction $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ définie sur $]1;+\infty[$.

Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 1, puis interpréter graphiquement les résultats.

Asymptote oblique :

C'est tout simplement une droite asymptote ni verticale, ni horizontale, donc d'équation $y = ax + b$ avec $a \neq 0$.

Alors la courbe C_f se rapproche de cette droite au voisinage de l'infini.

Pour prouver cela, il faut démontrer que $\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - y\right) = 0$.

Pour étudier la position relative de la courbe et de son asymptote, il faut étudier le signe de $f(x) - y$ au voisinage de l'infini.

Exemple : Considérons la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 7}{x + 2}$.

- Domaines, tableau de variation et limites aux bornes de D_f

- Montrez que $f(x) = 3x - 5 + \dfrac{3}{x+2}$

- Montrer que $(d) : y = 3x - 5$ est asymptote oblique à C_f en $-\infty$ et $+\infty$.

- Étudier la position relative de la courbe C_f et de son asymptote (d).