La fonction logarithme népérien.

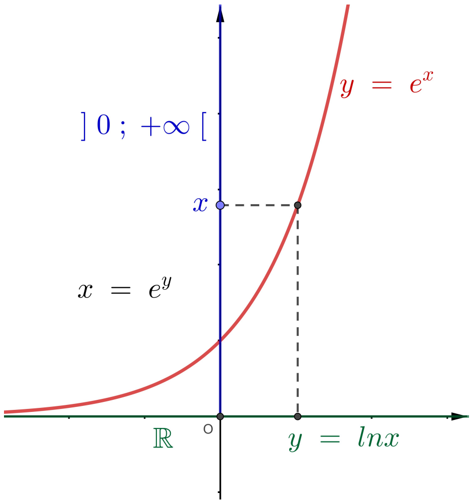
Historiquement, la fonction logarithme est apparue au dix-septième siècle, avant sa grande sœur la fonction exponentielle. Elle fut créée pour convertir des calculs de multiplications en additions, ce qui était fort utile aux astronomes, navigateurs et financiers de l'époque.

Sa propriété principale se résume donc ainsi : $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Nous avons abordé les choses en sens inverse, ce qui nous permet maintenant de se servir de la fonction exponentielle pour définir la fonction logarithme.

1) La fonction logarithme népérien :

Comme la fonction exponentielle est **continue** et **strictement croissante** de $]-\infty\,;+\infty[$ dans $]0\,;+\infty[$, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires** on peut écrire que :



pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x = e^y.$$

Ce nombre y existe et est unique.

Il permet donc de définir une fonction de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, qui au nombre x associe le nombre y noté $\ln x$ qui vérifie $x = e^y$.

Définition 1 : On appelle fonction **logarithme népérien** notée **ln**, la fonction définie de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, qui à un réel x de $]0\,;+\infty[$ associe le réel $y = \ln x$ tel que $x = e^y$.

On dit que la fonction ln est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle.

Conséquences :

$\ln 1 = 0$ $\qquad$ $\ln e = 1$

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\ln e^x = x$ $\qquad$ $\forall\ x \in]0\,;+\infty[$, $e^{\ln x} = x$

Il faut faire attention aux ensembles de définition.

En effet : Comme $e^0 = 1$ alors $\ln 1 = 0$ et comme $e^1 = e$ alors $\ln e = 1$.

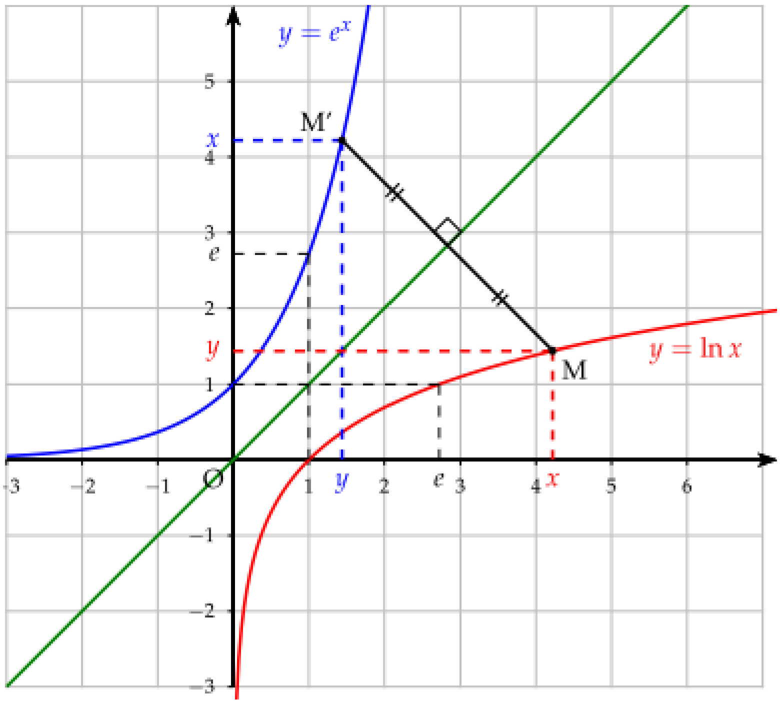
Si $x = e^y$ alors $y = \ln x$ donc $y = \ln e^y$ pour tout réel y.

Si $y = \ln x$ alors $x = e^y$ donc $x = e^{\ln x}$ pour tout réel $x > 0$.

Exercice n°1 : Donner les valeurs exactes de $\ln e^3$ et $\ln \dfrac{1}{e}$.

Propriété 1 :

Les représentations graphiques des fonctions logarithme népérien et exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



preuve :

On note $C_{\ln}$ et $C_{\exp}$ leurs courbes représentatives.

Soit $M(x\,;y)$ un point de $C_{\ln}$ avec $x \in]0;+\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$. On a alors $y = \ln x$.

Ce qui entraîne que $x = e^y$, donc que le point $M'(y\,;x)$ est un point de $C_{\exp}$.

Et les points $M(x\,;y)$ et $M'(y\,;x)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice, la droite d'équation $y = x$, donc les deux courbes également.

Propriété 2 : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

preuve : Soit a et b deux réels strictement positifs.

Supposons $a < b$.

Comme $a = e^{\ln a}$ et $b = e^{\ln b}$ alors on peut écrire que $e^{\ln a} < e^{\ln b}$.

La fonction exponentielle est strictement croissante, donc cela revient à $\ln a < \ln b$.

Ce qui prouve que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Propriété 3 : Conséquence directe du sens de variation de la fonction logarithme.

Soient a et b deux réels strictement positifs.

i) $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$ — $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$

ii) $\ln a = 0$ si et seulement si $a = 1$ — $\ln a < 0$ si et seulement si $0 < a < 1$

$\ln a > 0$ si et seulement si $a > 1$

Remarque : Ces propriétés permettent de résoudre des équations ou inéquations, à condition de les écrire sous la **même forme** que la propriété. Il faut également veiller à déterminer les **conditions de validité** de l'équation ou inéquation.

Exercice n°2 :

1) Résoudre l'équation $\ln(2-2x) = 1$.
2) Résoudre l'inéquation $\ln(2x+1) < -1$.

2) Propriétés de la fonction logarithme népérien :

Propriété 4 : Relation fonctionnelle.

Pour tout réels strictement positifs a et b on a : $\mathbf{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$.

preuve : $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$;

or on a : $e^{\ln ab} = ab$ et $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$, donc $\ln ab = \ln a + \ln b$.

Exemple : $\ln 2 + \ln 3 = \ln(2\times 3) = \ln 6$, propriété à l'origine de la fonction logarithme népérien.

Propriété 5: Quotient, inverse, puissance et racine carrée (conséquences).

i) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$ ii) $\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln b$

iii) $\ln(a^n)=n\times\ln a$ pour $n\in\mathbb{N}$ iv) $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$.

preuve :

i) On a $e^{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{a}{b}$ et $e^{\ln a-\ln b}=\frac{e^{\ln a}}{e^{\ln b}}=\frac{a}{b}$ donc $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

ii) Il suffit de prendre $a=1$ au-dessus.

ii) Par récurrence à l'aide de la propriété sur le produit.

iv) Comme $a=\sqrt{a}\times\sqrt{a}$ alors $\ln a=2\times\ln\sqrt{a}$ et donc $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\times\ln a$.

Exercice n°3 :

1) Exprimer $\ln 1024$, $\ln 72$ et $\ln\sqrt{12}$ en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$.

2) Déterminer le plus petit entier n vérifiant $2^n>10\,000$.

3) Résoudre l'équation $\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$.

3) Étude de la fonction logarithme népérien :

Propriété 6 : Dérivée.

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et : $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

preuve :

Par définition, on sait que la fonction $\ln$ est dérivable en a si $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$ existe.

Or $\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\frac{X-A}{e^X-e^A}$ en posant $X=\ln x$ et $A=\ln a$, et donc $x=e^X$.

La fonction $\ln$ étant **continue**, lorsque $x\to a$ alors $\ln x\to\ln a$ ou $X\to\ln a$.

Donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim\limits_{X \to \ln a} \dfrac{X - A}{e^X - e^A}$.

Mais $\lim\limits_{X \to \ln a} \dfrac{e^X - e^A}{X - A}$ est le nombre dérivé de la fonction exponentielle au point d'abscisse $X = \ln a$; donc $\lim\limits_{X \to \ln a} \dfrac{e^X - e^A}{X - A} = e^{\ln a} = a$.

Cette limite existe et est strictement positive pour tout réel $a > 0$.

Donc si la fonction logarithme est dérivable en tout point $a > 0$ avec $(\ln a)' = \dfrac{1}{a}$.

Exercice n°4 : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $\ln\sqrt{x}$, $\ln x^3$ et $\ln\dfrac{1}{x^2}$.

2) $x\ln x - x$, $\dfrac{\ln x}{x}$ et $(\ln x)^3$.

Propriété 7 : Limites aux bornes du domaine de définition.

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty .$$

preuve :

i) On revient à la définition d'une limite infinie en l'infini, en démontrant que :

pour tout réel M, il existe un réel A tel que : $(x > A) \Rightarrow (\ln x > M)$.

le réel M étant choisi arbitrairement grand, cela montrera que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Soit alors M un réel quelconque. On choisit $A = e^M$.

Alors dès que $x > A$, on a $x > e^M$ et donc $\ln x > M$, d'où le résultat.

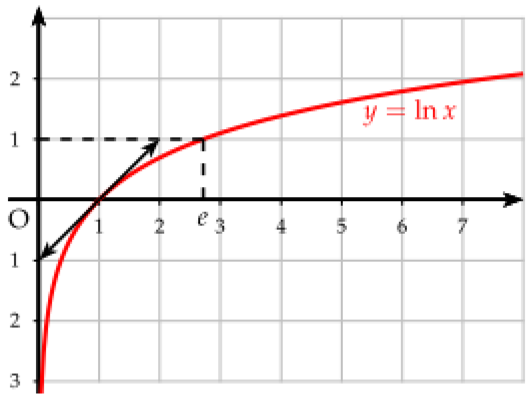
ii) Pour la limite en 0^+, on fait le changement de variable suivant : $X = \dfrac{1}{x}$.

Donc si $x \to 0^+$ alors $X \to +\infty$.

On a alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{X}\right) = \lim\limits_{X \to +\infty} (-\ln X) = -\infty$.

Tableau de variation et courbe représentative :

x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\Vert$	$+$		
$\ln$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$ 1	$\nearrow$ $+\infty$



i) Équation de la tangente à $C_{\ln}$ au point d'abscisse 1 :

$$y = \ln 1 + \frac{1}{1}(x-1) \text{ ce qui donne } y = x - 1.$$

ii) Équation de la tangente à $C_{\ln}$ au point d'abscisse e :

$$y = \ln e + \frac{1}{e}(x-e) \text{ ce qui donne : } y = \frac{1}{e}x \text{ donc la tangente passe par le point } O.$$

4) Une limite de référence, et croissances comparées :

Propriété 8 :

1) Limite de référence : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (conséquence de la définition du nombre dérivé)

2) Croissances comparées :

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} (x \ln x) = 0$

ii) On peut généraliser cela pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x^n}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} (x^n \ln x) = 0$$

Les fonctions puissances l'emporte sur la fonction logarithme en 0^+ et $+\infty$.

Exercice n°5 : Démontrer le premier point en utilisant la définition du nombre dérivé de ln en 1.

Exercice n°6 :

1) Démontrer la deuxième limite en effectuant le changement de variable $X = \ln x$ et en utilisant une limite connue de la fonction exponentielle.

2) En déduire la troisième limite en posant maintenant $X = \dfrac{1}{x}$.

Exercice n°7 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x)$ 2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2\ln x}{x-1}$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\ln x - (\ln x)^2\right)$.

Propriété 8 : Fonctions composées avec la fonction logarithme.

Soit une fonction $u(x)$ dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Alors la fonction $\ln u(x)$ est dérivable sur I avec : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

preuve : conséquence directe de la dérivée d'une fonction composée $f(u(x))$.

Remarque : les fonctions $u(x)$ et $\ln u(x)$ ont le même sens de variation puisque $u(x) > 0$.

Exercice n°8 : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ 2) $g(x) = \ln\sqrt{x^2-2}$ 3) $h(x) = \ln(\ln x)$

Comme à toute formule de dérivation on peut faire correspondre une formule de primitive, celle-ci ne déroge pas à la règle.

Propriété 9 : Primitives à base de logarithmes.

Si $u(x)$ est une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur un intervalle I,
alors la fonction $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ admet une primitive de la forme $\ln|u(x)|$.

5) Applications :

a) Approximation du nombre e :

On définie la suite (u_n) par $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$.

1) On considère la fonction $f(x) = x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) On pose $v_n = \ln u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
Étudier la limite de (v_n) et en déduire celle de (u_n)

3) Proposer un algorithme permettant de donner la valeur de n nécessaire pour obtenir une approximation de e à 10^{-3} près.
Que pensez-vous de la vitesse de convergence de la suite ?

b) Étude d'une fonction :

On considère la fonction f suivante définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x - 4\ln x$.

1) Étudier les limites de f en 0 et $+\infty$.

2) Étudier les variations de f.

3) En déduire, en le justifiant, le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$.

4) A l'aide de la calculatrice, donner la valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de ces solutions.

6) Le logarithme décimal :

Définition 2 :

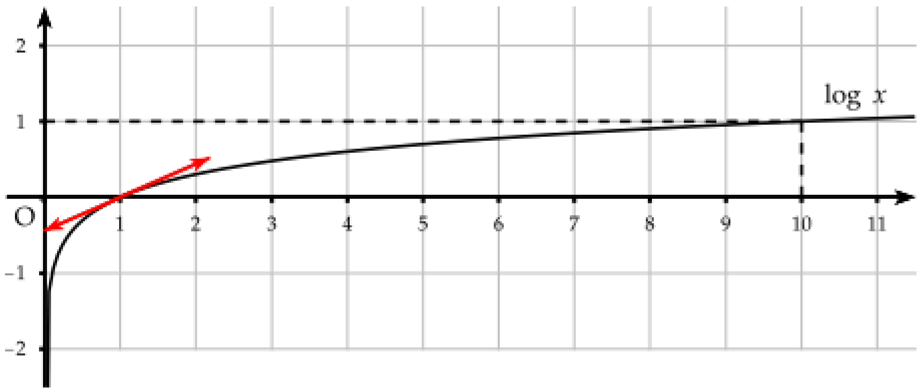
On appelle fonction **logarithme décimal** notée **log**, la fonction définie de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Remarques :

- La fonction log a les mêmes variations que la fonction ln.
- La fonction log transforme les produits en sommes.
- $y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$ et ainsi $\log 10^1 = 1$, $\log 10^2 = 2$ et $\log 10^n = n$.

On a la représentation graphique suivante, avec $(\log x)' = \dfrac{1}{x\ \ln 10}$.



a) <u>Nombre de chiffres dans l'écriture décimale</u> :

La fonction mathématique **Partie Entière** :

La partie entière d'un **réel** x, notée $E(x)$ est définie comme le plus grand entier inférieur ou égal à x. On a donc :

$$E(x) = n \text{ si et seulement si : } n \in \mathbb{Z} \text{ et } n \leqslant x < n+1$$

Par exemples : $E(\pi) = 3$ et $E(-\pi) = -4$.

Un entier N est toujours compris entre deux puissances de 10 .

Soit alors $10^n \leqslant N < 10^{n+1}$. Dans ce cas, N possède $n+1$ chiffres.

Comme la fonction log est strictement croissante, on a :

$\log 10^n \leqslant \log N < \log 10^{n+1}$ et donc $n \leqslant \log N < n+1$ ce qui montre que $n = \mathrm{E}(\log \mathrm{N})$.

Un entier N s'écrit donc avec $\mathrm{E}(\log(\mathrm{N}))+1$ chiffres.

Par exemple, quel est le nombre de chiffres de 2020^{2020} ?

b) Utilisation en chimie :

L'acidité d'une solution est donnée par son pH : $pH = -\log\left[\mathrm{H}^+\right]$ ou encore $\left[\mathrm{H}^+\right] = 10^{-pH}$.

Ainsi, si la concentration en $\left[\mathrm{H}^+\right]$ est multiplié par 10 , le pH diminue de 1 .

Si une étiquette d'eau gazeuse indique $pH = 6,3$ alors on a : $\left[\mathrm{H}^+\right] = 10^{-6,3} \approx 5 \times 10^{-7}$ mol/l.

b) En acoustique :

Le niveau sonore L (en décibels) d'un son d'intensité I est donnée par : $L = 10 \log \dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}$ où $\mathrm{I}_0 = 10^{-12}$ W. m^{-2} correspond au seuil d'audibilité en dessous duquel aucun son n'est perçu.

Par exemple le niveau sonore L d'une conversation normale qui correspond à $I = 10^5 \mathrm{I}_0$ est de : $L = 10 \log 10^5 = 10 \times 5 = 50$ décibels.

c) En sismologie :

La magnitude M d'un séisme d'intensité I est mesuré sur l'échelle de Richter par : $M = \log \dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}$. Voici deux exemples :

Fukushima (2011) : $I = 6,31 \times 10^8 \mathrm{I}_0$ donc $M = 8 + \log 6,31 \approx 8,8$.
Californie (1992) : $I = 3,16 \times 10^7 \mathrm{I}_0$ donc $M = 7 + \log 3,16 \approx 7,5$.