La fonction exponentielle

1) Introduction :

a) Croissance exponentielle.

Le cas typique de croissance exponentielle est une quantité initiale qui double à chaque période. Ce phénomène se modélise mathématiquement par une suite géométrique :

Par exemple $u_0=1$ et $u_{n+1}=2u_n$, ce qui donne $u_n=2^n$. Ainsi u_{30} dépasse le milliard.

Nuage de points correspondant.

b) Décroissance exponentielle.

Une valeur qui diminue de 20% par mois correspond à une multiplication par $0{,}8$.
Cela se modélise par une suite géométrique de la forme $v_n=v_0\times 0{,}8^n$.

c) Extension.

On va étendre cette notion pour une variable réelle x en définissant sur $\mathbb{R}$ tout entier :
- la fonction exponentielle de base 2 : $f(x)=2^x$;
- ainsi qu'une fonction exponentielle de base $0{,}8$: $g(x)=0{,}8^x$.

2) Définition :

Définition 1 : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1.$$

Cette fonction se nomme **fonction exponentielle** et on la note **exp**. Ainsi $f(x) = \exp(x)$.

L'existence de cette fonction est admise, mais nous allons démontrer qu'elle n'est jamais nulle, et ensuite qu'elle est unique.

<u>Rappel</u> : la fonction composée de la fonction u suivie de la fonction f s'écrit :

$f \circ u : x \mapsto u(x) \mapsto f(u(x))$ a pour fonction dérivée : $[f(u(x))]' = u'(x) \times f'(u(x))$

et donc, par exemple : $[f(-x)]' = -f'(-x)$.

ROC

i) La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$:

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

On pose $\phi(x) = f(x)\,f(-x)$, et on montre que ϕ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
Pour cela, dérivons ϕ, qui est dérivable puisque f l'est, tout comme $u: x \mapsto -x$.
Alors $\phi'(x) = 0$ ce qui prouve que ϕ est constante égale à 1.
Donc f ne peut pas s'annuler sur $\mathbb{R}$.

ii) Unicité d'une telle fonction f :

On suppose qu'il existe f et g telles que $f = f'$, $g = g'$ et $f(0) = g(0) = 1$.
Alors g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc on peut poser $h = f / g$,
et on montre que $h'(x) = 0$, donc que h est constante égale à 1.

Ce qui implique que $f = g$, d'où l'unicité.

Propriété 1 : Relation fonctionnelle.

Pour tout réels a et b on a : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Remarque :
Cette relation s'appelle la relation fonctionnelle car on pourrait définir la fonction exponentielle à partir de cette propriété pour retrouver que l'exponentielle est égale à sa dérivée.

preuve :

On pose $h(x)=\dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$. Montrons que h n'est autre que la fonction exp.
Pour cela, il suffit de prouver que $h'=h$ et que $h(0)=1$.
On utilisera le fait que $f'=f$ donc que $\exp'=\exp$.

Alors $h(x)=\exp(x) \Leftrightarrow \exp(x+a)=\exp(x)\times\exp(a)$.

Propriété 2 : Autres opérations.

Soit a et b deux réels, et n un entier naturel. On a les relations suivantes :

i) $\exp(-a)=\dfrac{1}{\exp(a)}$ ii) $\exp(a-b)=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$ iii) $\exp(na)=[\exp(a)]^n$.

preuve :

i) $\exp(a)\times\exp(-a)=\exp(a-a)=\exp(0)=1$ donc $\exp(-a)=1/\exp(a)$;

ii) $\exp(a-b)=\exp(a+(-b))=\exp(a)\times\exp(-b)=\exp(a)\times1/\exp(b)$;

iii) par récurrence sur n.

Définition 2 : Nouvelles Notations.

Du fait des propriétés similaires entre la fonction exponentielle et la fonction puissance, on pose : $e=\exp(1)$ avec $e\approx 2{,}718\ldots$ et la fonction exponentielle s'écrira alors :

$$\exp(x)=\exp(1x)=(\exp(1))^x=(e)^x=e^x.$$

On a alors les propriétés précédentes qui s'écrivent : $\exp(x)=e^x$.

$e^0=1$ $e^1=e\approx 2{,}718$

$e^{a+b}=e^a\times e^b$ $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$ $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$ $e^{na}=(e^a)^n$

Exemples : Simplifier $\dfrac{e^{-3}\times e^7}{e^2}=e^2$ $\dfrac{e^{-5}\times e^{-1}\times(e^3)^2}{e^{-3}}=e^3$

3) Étude de la fonction exponentielle :

Propriété 3 : Quelques propriétés sur le comportement de la fonction exponentielle $f(x)=e^x$.

i) La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

ii) La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

preuve :

i) On sait que $\exp(x)\neq 0$ pour tout réel x. De plus, la fonction exponentielle est continue car dérivable sur $\mathbb{R}$. S'il existait un réel a tel que $\exp(a)<0$, d'après le TVI il existerait un réel α tel que $\exp(\alpha)=0$ ce qui est impossible. La fonction exponentielle est donc strictement positive.

ii) Immédiat puisque exp' = exp et que $\exp>0$.

Conséquences : Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on peut écrire les équivalences suivantes :

Propriété 4 : Résolution d'équations et d'inéquations.

i) $e^x=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \qquad\qquad e^x>1 \quad \Leftrightarrow \quad x>0$

ii) $e^x=e^y \quad \Leftrightarrow \quad x=y \qquad\qquad e^x<e^y \quad \Leftrightarrow \quad x<y$

Exercice :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x^2+3}=e^{7x}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{-5x}\leqslant\dfrac{1}{e^{-3x+4}}$.

Propriété 5 : Limites.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

ROC **Démonstration** : Soit la fonction f suivante : $f(x) = e^x - x$.

Dérivons la fonction f : $f'(x) = e^x - 1$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on a :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \quad \text{et} \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Du tableau de variation on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0 \quad \text{donc} \quad e^x > x$

or on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, par comparaison on a :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

En faisant le changement de variable $X = -x$, on obtient :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

Remarque :

Retenons de cette démonstration le résultat suivant qui nous sera bientôt utile :

$e^x > x$ pour tout rée x .

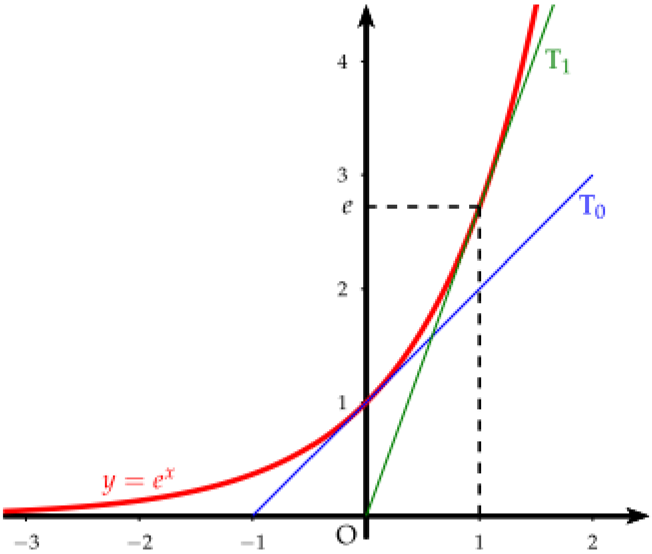
Courbe représentative :

D'après les renseignements obtenus, on a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp(x)$	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	e $\nearrow$	$+\infty$

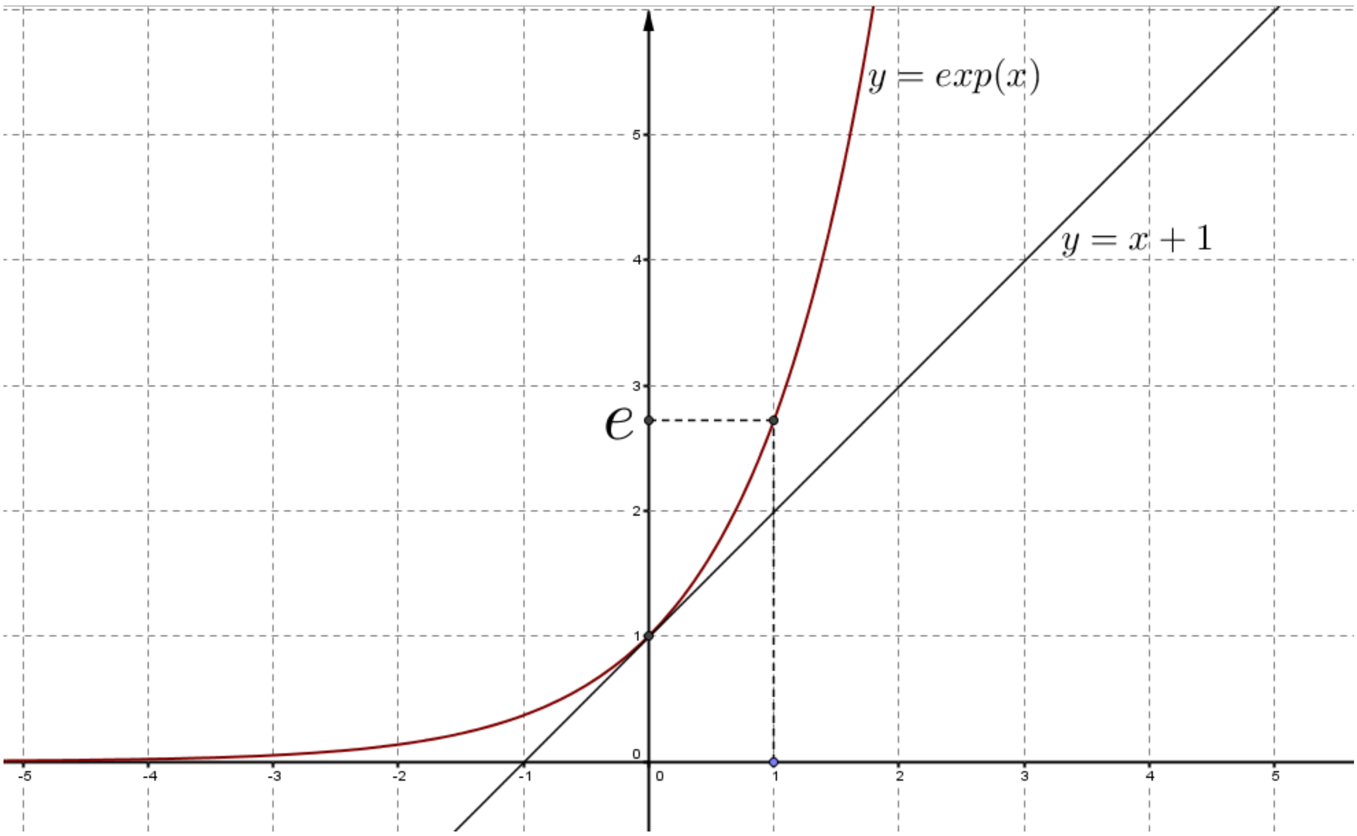
On obtient la courbe suivante :

Courbe représentative de la fonction exponentielle :



Exercice : Équations des tangentes T_0 et T_1 aux points d'abscisses 0 et 1.

On obtient : $\boldsymbol{T_0 \;:\; y = x + 1}$ **et** $\boldsymbol{T_1 \;:\;:\; y = e\,x}$ **.**



On observe alors finalement que :

$$e^x \leqslant x + 1 \text{ et aussi } e^x \leqslant e\,x \text{ pour tout réel } x\,.$$

Ce sont des inégalités de convexité : la fonction exponentielle étant convexe, sa courbe est toujours située au-dessus de ces tangentes.

Propriété 6 : Limites de référence

i) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1$ ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^n}\right) = +\infty$ iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^n e^x\right) = 0$

La fonction exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances, **en l'infini(uniquement)**.

i) La démonstration découle de la définition de la dérivée en 0 appliquée à la fonction exponentielle :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1 .$$

Remarque :

On retrouve l'approximation affine de la fonction exponentielle au voisinage de 0 avec la définition du nombre dérivé en 0.

Ici on obtient : $e^x = 1 + x$ pour x proche de 0.

ii)

Démonstration : Comme pour la limite de e^x en $+\infty$, on étudie les variations d'une fonction. Soit donc la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$

On calcule la dérivée g' : $g'(x) = e^x - x$

D'après le paragraphe 2.3, on a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > x \quad$ donc $\quad g'(x) > 0$

La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

Or $g(0) = 1$ donc si $x > 0$ alors $g(x) > 0$. On en déduit donc que :

$$\text{Pour } x > 0 \quad g(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x > \frac{x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, par comparaison, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

iii)

Pour la deuxième limite, on fait un changement de variable $X = -x$, on obtient alors :

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{X \to +\infty} (-X)e^{-X} = -\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$$

Exemple d'étude d'une fonction :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 1}$

1) Pourquoi les droites d et Δ d'équation respectives $y = 2$ et $y = -3$ sont-elles asymptotes à $\mathscr{C}_f$?
2) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.
3) Tracer d, Δ et $\mathscr{C}_f$
4) La courbe semble avoir un point de symétrie. Démontrer cette conjecture.

1) On étudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   a) En $+\infty$. On a une forme indéterminée, on change donc la forme de la fonction :

$$f(x) = \frac{e^x\left(2 - \dfrac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right)} = \frac{2 - \dfrac{3}{e^x}}{1 + \dfrac{1}{e^x}}$$

   On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{e^x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

   Par quotient, on a donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d en $+\infty$ d'équation $y = 2$.

   b) En $-\infty$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} 2e^x - 3 = -3 \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient, on a} \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3\end{array}$$

   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale Δ en $-\infty$ d'équation $y = -3$.

2) On calcule la dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^x(e^x + 1) - e^x(2e^x - 3)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(2x^x + 2 - 2e^x + 3)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{5e^x}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

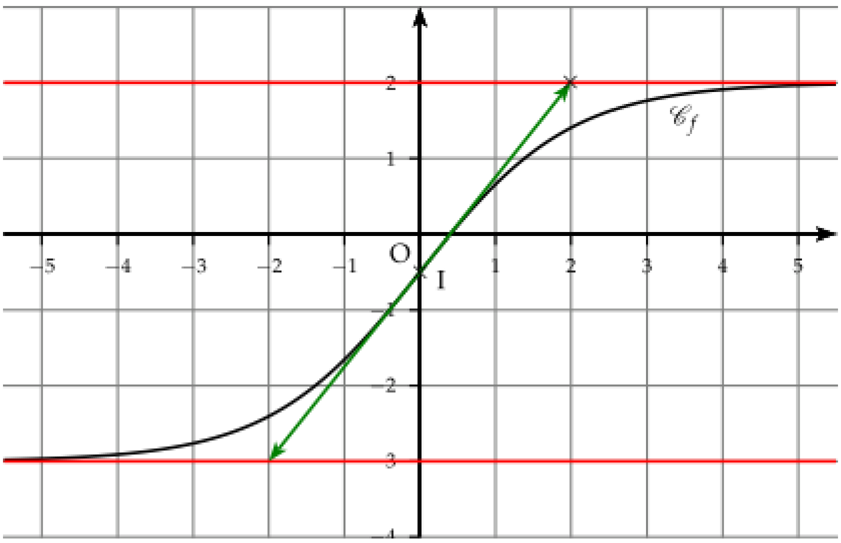
3) On a le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-3 ↗	2

4) Pour tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, il est important de placer un point et sa tangente. Par exemple le point I d'abscisse nul. On a :

$$f(0) = -\frac{1}{2} \qquad f'(0) = \frac{5}{4}$$

On obtient la courbe suivante :



5) La courbe semble symétrique par rapport au point I. Pour le démontrer, prenons un nouveau repère centré en I. Un point $M(x, y)$ a pour coordonnées dans le nouveau repère $M(X, Y)$. On a alors :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x \\ Y = f(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2e^X - 3}{e^X + 1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4e^X - 6 + e^X + 1}{2(e^X + 1)} = \dfrac{5(e^X - 1)}{2(e^X + 1)} \end{cases}$$

Montrons que la fonction $g(X) = \dfrac{5(e^X - 1)}{2(e^X + 1)}$ est impaire.

On a :

$$g(-X) = \frac{5(e^{-X} - 1)}{2(e^{-X} + 1)} = \frac{5(1 - e^X)}{2(1 + e^X)} = -g(X)$$

La fonction g est impaire, donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à I

4) Complément sur la fonction exponentielle :

Propriété 7 :	Si u est une fonction définie et dérivable sur un ensemble D, alors la fonction $e^{u(x)}$ est définie et dérivable sur D , avec : $$[e^{u(x)}]' = u'(x)\, e^{u(x)}.$$

Remarque : Les fonctions u et e^u ont le même sens de variation puisque $e^{u(x)} > 0$.

Exercice n°1 : Fonctions d'atténuation, de la forme $f_k(x) = e^{-kx}$ où $k > 0$.

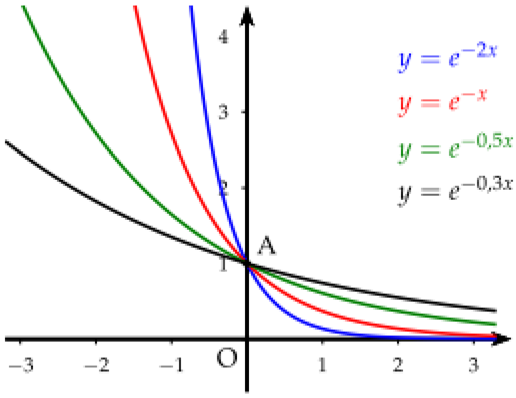
Dresser le tableau de variation des fonctions f_k .

Par composition, on a les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = +\infty$

On calcule la dérivée : $f_k'(x) = -ke^{-kx} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\searrow$	0



Remarque : Plus le coefficient k est important plus l'atténuation est grande.

Exemples d'utilisation : notamment en physique

- avec la loi de désintégration radioactive où le nombre de noyaux en fonction du temps obéit à : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$
- la décharge d'un condensateur dans un circuit RC où le courant obéit à : $i(t) = \dfrac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$
- dans l'expression d'une force de frottement proportionnelle à la vitesse (chute libre dans l'air) que nous allons développer.

Exercice n°2 : Fonctions gaussiennes, de la forme $f_k(x)=e^{-kx^2}$ où $k>0$.

Dresser le tableau de variation des fonctions f_k.

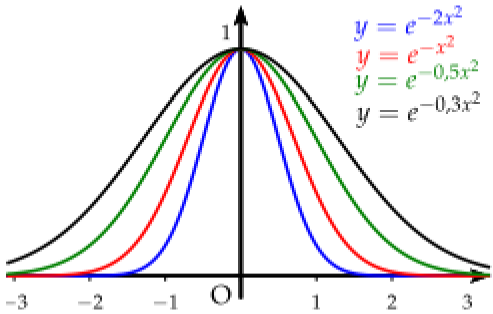
Par composition, on a les limites : $\lim_{x\to+\infty} g_k(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} g_k(x) = 0$

On calcule la dérivée : $g_k'(x) = -2k\,xe^{-kx}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

La dérivée g_k' est donc du signe de $-x$

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_k(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Remarque : Ces fonctions interviennent en probabilité avec la loi normale. La représentation de ces fonctions s'appelle des courbes en cloches.

5) Approximation affine d'une fonction dérivable :

Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ et $x_0 \in [a,b]$.

Alors $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ soit encore $\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right) = 0$.

Ceci est équivalent à dire que $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \varepsilon(h)$ où $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

En multipliant par h, on obtient $f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0) = h\varepsilon(h)$,

ou encore : $f(x_0+h) = f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 qd $h \to 0$.

- Ce qui donne ce qu'on appelle : **le développement limité de f au voisinage de x_0** :

$$f(x_0+h) = f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

- Lorsque h est suffisamment petit, on peut faire l'**approximation** suivante :

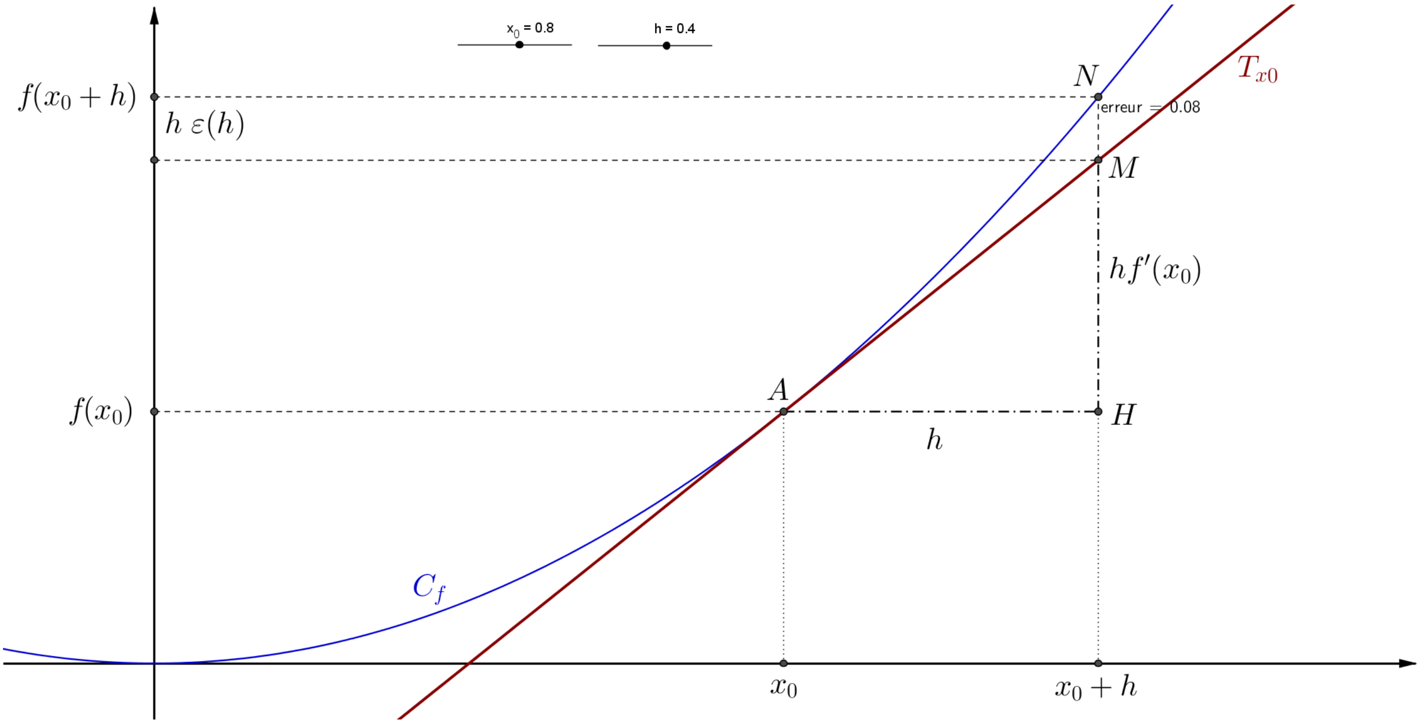
$f(x_0+h) = f(x_0)+hf'(x_0)$ qui est une fonction **affine** de la variable h.

Cela revient à remplacer la courbe C_f par sa tangente en x_0.

On peut facilement en retrouver l'équation, en considérant que sur cette tangente le taux d'accroissement est :

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ et donc $\Delta y = f'(x_0)\Delta x$, ou encore $\Delta y = hf'(x_0)$.

Cela peut aussi se traduire par : $y_{x_0+h} - y_{x_0} = hf'(x_0)$ et $y_{x_0+h} = y_{x_0} + hf'(x_0)$.



Cela revient à remplacer le point réel N sur la courbe C_f par son voisin proche, le point M situé sur la tangente à la courbe au point A .

Au voisinage du point A , c'est-à-dire lorsque h est suffisamment petit, on remplace la courbe par la droite qui lui est la plus proche, sa tangente.
C'est donc une approximation affine, appelée méthode d'Euler.

C'est aussi une approximation dans laquelle l'erreur commise est de l'ordre de h , c'est le terme $h\varepsilon(h)$.

Méthode d'Euler :

L'approximation affine $f'(x+h)=f(x)+hf'(x)$ donne $f(x+h)=f(x)+hf(x)=(1+h)f(x)$ avec la fonction exponentielle puisque $f'=f$.

Pour cela, on part du point $(0,1)$ et on choisit un pas $h>0$.
Sachant que $f'(0)=f(0)=1$ on calcule $\Delta y=h\times f'(0)=h$ pour obtenir le point suivant.
Et ainsi de suite...

Tableau de valeurs avec un pas $h=0{,}1$:

x	$-0{,}2$	$-0{,}1$	0	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}4$	$0{,}5$	$0{,}6$	$0{,}7$	$0{,}8$	$0{,}9$	1
y	0,81	0,9	1	1,1	1,21	1,33	1,46	1,6	1,76	1,94	2,13	2,35	2,58
Δy	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,16	0,17	0,19	0,21	0,24	0,26

Algorithme :

On part de $x_0=0$ puis on fabrique une suite d'abscisses $x_{n+1}=x_n+h$ et d'ordonnées $y_n=f(x_n)$.
Mais à chaque étape, on remplace $f(x)$ par son approximation affine :

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)=f(x)+hf(x)=(1+h)f(x)$$

De sorte que $y_{n+1}=f(x_{n+1})=f(x_n+h)$ donne $y_{n+1}=(1+h)y_n$.

En langage naturel :	En Python :

a prend la valeur 0
b prend la valeur 1
Donner h et n
Pour i allant de 0 à n faire :
 	
afficher a et b
a prend la valeur a + h
b prend la valeur (1 + h) × b
	`# méthode d'Euler`
	`from lycee import *`
	`a , b = 0 , 1`
	`h = demande("Donner la valeur du pas h:")`
	`n = demande("Donner le nombre de points désirés:")`
	`for i in range(n+1):`
	`    print("a=",a,"b=",b)`
	`    a = a + h`
	`    b = (1 + h)*b`

<u>Résultats avec h = 0.5 et n = 10 points</u> :

```
a= 0 b= 1
a= 0.5 b= 1.5
a= 1.0 b= 2.25
a= 1.5 b= 3.375
a= 2.0 b= 5.0625
a= 2.5 b= 7.59375
a= 3.0 b= 11.390625
a= 3.5 b= 17.0859375
a= 4.0 b= 25.62890625
a= 4.5 b= 38.443359375
a= 5.0 b= 57.6650390625
```

On observe que $e^5\approx 148$, et donc que l'erreur commise ici est assez importante, puisque l'algorithme fournit $e^5\approx 58$.

Avec un pas $h=0{,}01$ on obtient $e^5\approx 141$ avec cette méthode, et une erreur d'environ 5%.

Exercice :

Considérons une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f'(x) = 2x$ et $f(0) = 0$.

Tracer la courbe sur $[0;2]$ en utilisant la méthode d'Euler, avec un pas $h = 0,1$.

(vérifier qu'on retrouve bien l'allure de la fonction carrée !)