Droites et plans de l'espace...

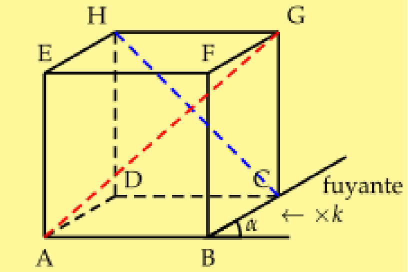
1) Droites et plans :

a) La perspective cavalière :

Définition 1 :

La perspective cavalière est une manière de représenter en deux dimensions des objets en volume. Cette représentation ne possède pas de point de fuite :
la taille des objets ne diminue pas lorsqu'ils s'éloignent.

Dans cette perspective, deux axes sont orthogonaux (vue de face en vraie grandeur) et le troisième axe est incliné d'un angle α compris en général entre 30 et 60°, appelé **angle de fuite**.
Les mesures sur cet axe sont multipliées par un **facteur de réduction** k compris en général entre 0,5 et 0,7.



représentation du cube ABCDEFGH

Cette représentation ne donne donc qu'une indication sur la profondeur de l'objet.

Attention :

La perspective cavalière **ne conserve pas** :

- **la mesure** : deux segments de même longueur peuvent être représentés par deux segments de longueurs différentes, comme par exemple $AB \neq BC$
- **les angles** : deux droites perpendiculaires peuvent être représentées par deux droites non perpendiculaires, comme (AB) et (AD)

Un carré peut être représenté par un parallélogramme, comme AEHD !
Deux droites peuvent se couper sur la perspective sans être sécantes en réalité, comme les droites (HC) et (AG) !

En revanche, cette perspective **conserve** :

- **le parallélisme** : deux droites parallèles sont représentées par des droites parallèles
- **le milieu** ou tout autre division d'un segment

b) Le Point :

Le point est l'objet élémentaire de la géométrie. Il est de dimension nulle.
Pourtant il n'a pas d'existence réelle.
Un point c'est avant tout une position.
Et deux points non confondus permettent de définir une direction.

c) La Droite :

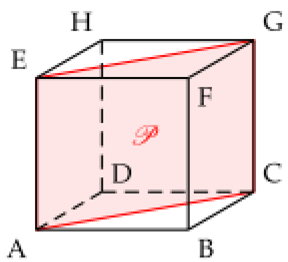
Une droite est un objet géométrique constitué d'un ensemble de points.
Elle est parfaitement définie par la donnée de seulement deux points ou d'un point et d'une direction. C'est un objet à une dimension.

d) Le Plan :

Un plan est un objet géométrique constitué d'un ensemble de points, ou de droites.
Il est parfaitement défini par la donnée de seulement trois points non alignés.
Il peut aussi être défini par deux droites sécantes ou strictement parallèles.
C'est un objet géométrique de dimension deux.

Exemple : Dans le cube ABCDEFGH le plan (P) peut être défini par :

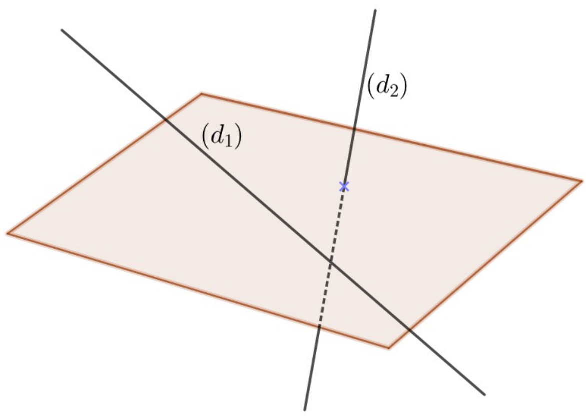
- les points A , E et C pour plan (AEC)
- les droites (EC) et (AG)
- les droites (AE) et (CG)

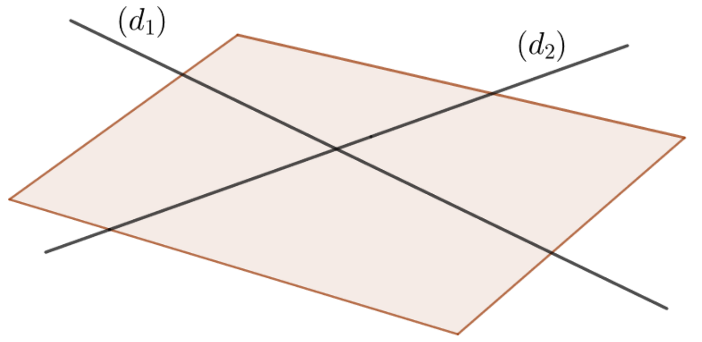
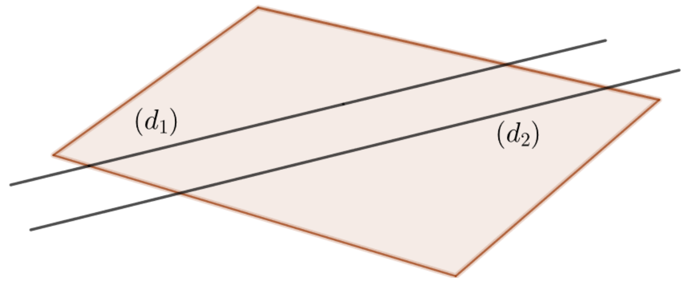


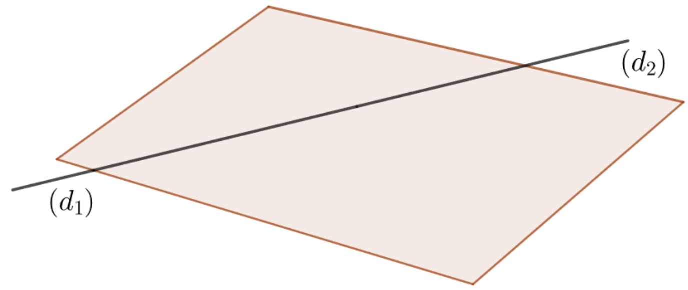
e) Relations entre deux droites :

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.

d_1 et d_2 sont non coplanaires



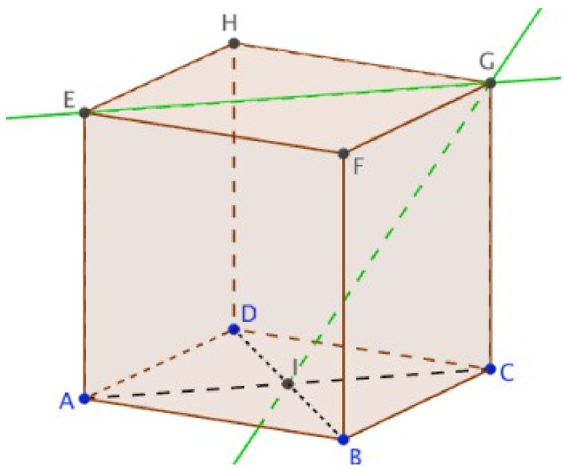
<table>
<tr><th colspan="2">d_1 et d_2 sont coplanaires</th></tr>
<tr><td>d_1 et d_2 sont sécantes</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">d_1 et d_2 sont parallèles</td><td>

d_1 et d_2 sont strictement parallèles</td></tr>
<tr><td>

d_1 et d_2 sont confondues</td></tr>
</table>

En conclusion : Deux droites peuvent être parallèles ou sécantes, ou non coplanaires.

Exemple : ABCDEFGH est un cube

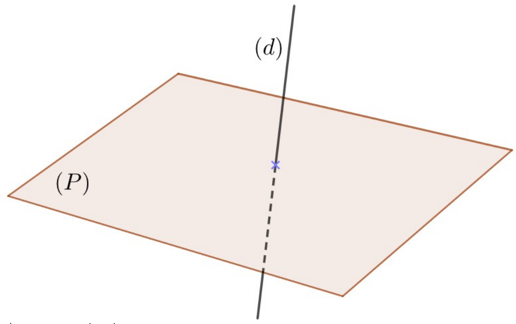


- Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan (EFG) et sont sécantes en G
- Les droites (AD) et (FG) appartiennent au même plan (ADG) et sont parallèles
- Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires

f) Relations entre une droite et un plan :

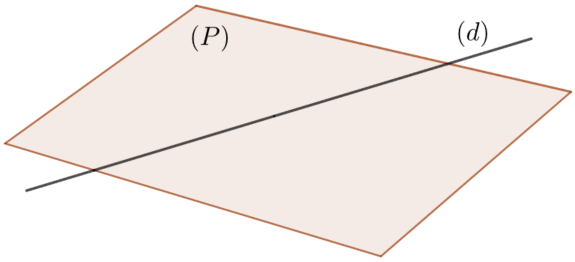
Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

La droite (d) et le plan (P) sont sécants

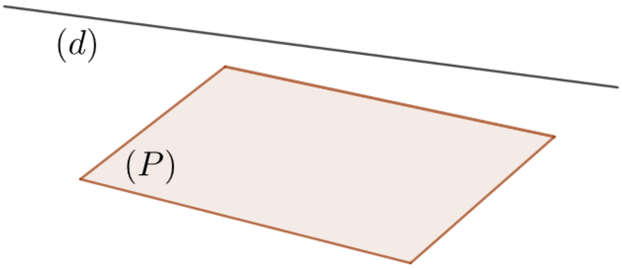


(d) et (P) sont sécants en un point I

La droite (d) et le plan (P) sont parallèles



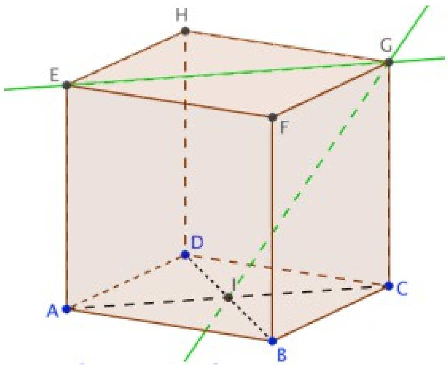
(d) est incluse dans le plan (P)



(d) et (P) sont strictement parallèles

Exemple : ABCDEFGH est un cube.

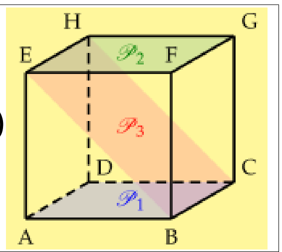
- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I
- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG)
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles



g) Relations entre deux plans :

Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

parallèles : si les deux plans n'ont aucun point commun (ici $P_1 \cap P_2 = \emptyset$)
ou si les deux plans sont confondus
sécants : si les deux plans ont une droite en commun (ici $P_1 \cap P_3 = (BC)$)



Remarque :

Deux droites ou deux plans confondus, une droite incluse dans un plan et ce plan, sont considérés comme parallèles entre eux, mais au sens large.

Parallèle signifie même direction, avant toute notion d'intersection.

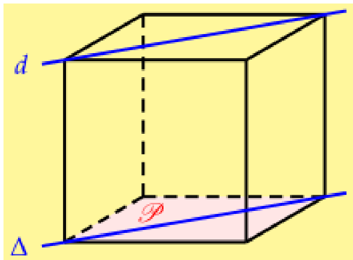
2) Le Parallélisme :

Définition 3 : Une droite (d) est parallèle à un plan (P) si et seulement si :
soit (d) est incluse dans le plan (P)
soit (d) ne possède aucun point commun avec (P)

Propriété 1 : Parallélisme d'une droite et d'un plan.

Si une droite (d) est parallèle à une droite (Δ) contenue dans un plan (P),
alors la droite (d) est parallèle au plan (P) :

$$\left.\begin{array}{l}(d) // (\Delta) \\ (\Delta) \subset (P)\end{array}\right\} \Rightarrow (d) // (P)$$



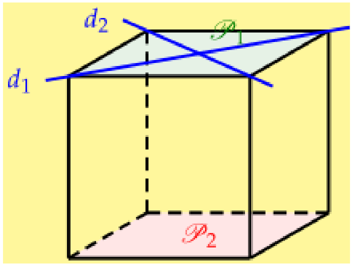
Remarque : Donc une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Définition 4 : Deux plans sont parallèles si et seulement si :
soit ils sont confondus
soit ils ne possèdent aucun point commun

Propriété 2 : Parallélisme de deux plans.

Si un plan (P_1) contient deux droites sécantes (d_1) et (d_2) parallèles à un plan (P_2), alors les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles :

$$\left.\begin{array}{l}(d_1)\subset(P_1)\text{ et }(d_2)\subset(P_1)\\(d_1)\text{ et }(d_2)\text{ sécantes}\\(d_1)//(P_2)\text{ et }(d_2)//(P_2)\end{array}\right\}\Rightarrow(P_1)//(P_2)$$



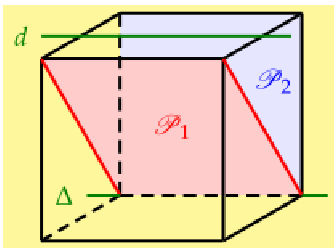
Remarque : Le plan (P_1) contient deux droites sécantes parallèles au plan (P_2).

Définition 5 : Deux **droites** sont **parallèles** si et seulement si elles ont la **même direction**.

Propriété 3 : Parallélisme de deux droites.

Si une droite (d) est parallèle à deux plans (P_1) et (P_2) sécants en une droite (Δ), alors (d) et (Δ) sont parallèles :

$$\left.\begin{array}{c}(P_1)\cap(P_2)=\Delta\\(d)//(P_1)\text{ et }(d)//(P_2)\end{array}\right\}\Rightarrow(d)//(\Delta)$$

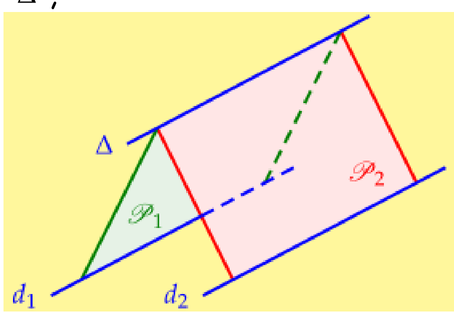


Remarque : Une droite parallèle à deux plans est parallèle à leur intersection éventuelle.

Propriété 4 : Théorème du toit *(démonstration en géométrie vectorielle).*

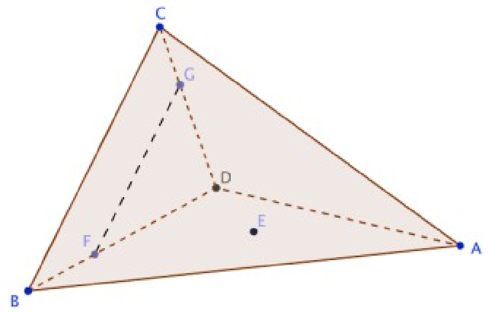
Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles, contenues respectivement dans les plans P_1 et P_2. Si ces plans P_1 et P_2 sont sécants en une droite Δ, alors la droite Δ est parallèle à d_1 et d_2 :

$$\left.\begin{array}{c}d_1//d_2\\d_1\subset P_1\text{ et }d_2\subset P_2\\P_1\cap P_2=\Delta\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\Delta//d_1\\\Delta//d_2\end{array}\right.$$



Remarque : On peut donc construire un toit en partant de bases parallèles.

Exercice n°1 : ABCD est une pyramide.

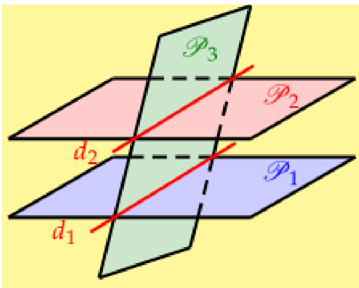


Le segment $[FG]$ est parallèle à l'arête $[BC]$.
E est un point du plan (ABC).

Construire l'intersection du plan (ABC) avec la pyramide.

Propriété 5 : Plans parallèles.

Si deux plans P_1 et P_2 sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre, et les droites d'intersection d_1 et d_2 sont parallèles :



$$\left.\begin{array}{l} P_1 // P_2 \\ P_3 \cap P_1 = d_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} P_3 \cap P_2 = d_2 \\ d_1 // d_2 \end{array}\right.$$

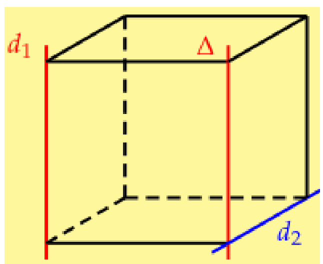
preuve dans le prochain chapitre sur la géométrie vectorielle.

3) L'orthogonalité :

a) Droites orthogonales :

Définition 6 : Deux droites d_1 et d_2 sont :

- **perpendiculaires**, si et seulement si d_1 et d_2 se coupent perpendiculairement ;
- **orthogonales**, si et seulement si il existe une droite Δ parallèle à d_1 qui est perpendiculaire à d_2.



Note : On écrira indistinctement pour deux droites perpendiculaires ou orthogonales : $d_1 \perp d_2$.

Remarque : Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires, contrairement à deux droites perpendiculaires.

Propriété 6 :	Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

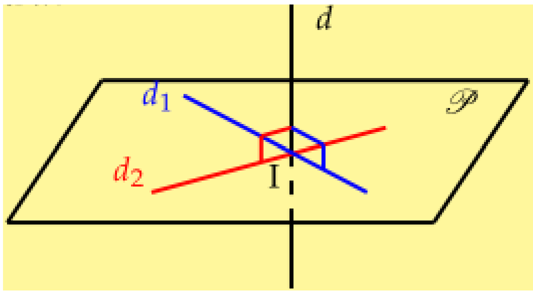
preuve dans le prochain chapitre sur la géométrie vectorielle.

b) Orthogonalité entre une droite et un plan :

Définition 7 :	Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan.

Propriété 7 :

Si une droite (d) est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan (P), alors elle est orthogonale au plan (P).



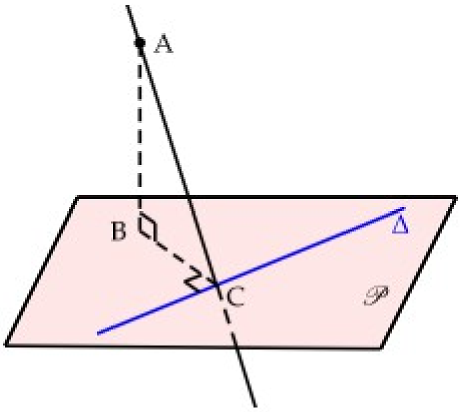
preuve dans le prochain chapitre sur la géométrie vectorielle.

Remarque : En particulier, si I est le point d'intersection de la droite (d) avec le plan (P), toute droite passant par I est perpendiculaire à (d).

Exemple :

Δ est une droite contenue dans le plan (P).
Un point A extérieur à (P) se projette orthogonalement en B sur le plan (P), et B se projette orthogonalement en C sur la droite Δ.

Démontrons que les droites (AC) et Δ sont orthogonales.



En effet, Δ est orthogonale à (AB) et à (BC), deux droites sécantes du plan (ABC), donc Δ est orthogonale au plan (ABC).

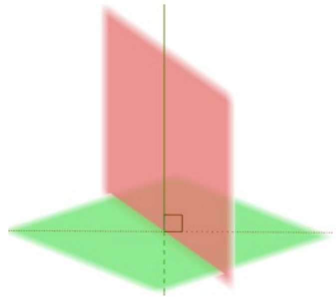
Elle est donc orthogonale à toute droite de ce plan, donc en particulier à la droite (AC).

c) Orthogonalité de deux plans :

Propriété 8 :

Deux plans sont perpendiculaires lorsque

l'un contient une droite orthogonale de l'autre.



preuve dans le prochain chapitre sur la géométrie vectorielle.