- Distance d'un point à un plan -

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère un point $A\left(x_A\,;y_A\,;z_A\right)$ et un plan (P) d'équation : $ax+by+cz+d=0$.

Par convention, on notera $\mathbf{F}(\boldsymbol{M})=\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{by}+\boldsymbol{cz}+\boldsymbol{d}$ pour tout point $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace.

Ainsi, pour $A(3;-2;5)$, on aura $F(A)=a x_A+b y_A+c z_A+d=3a-2b+5c+d$.

Alors un point $M(x;y;z)$ de l'espace appartient au plan (P) si et seulement si on a $F(M)=0$.

Le but de l'exercice est de déterminer une formule permettant de calculer la distance du point A au plan (P) en fonction des données de départ, le point A et le plan (P), donc la fonction F.

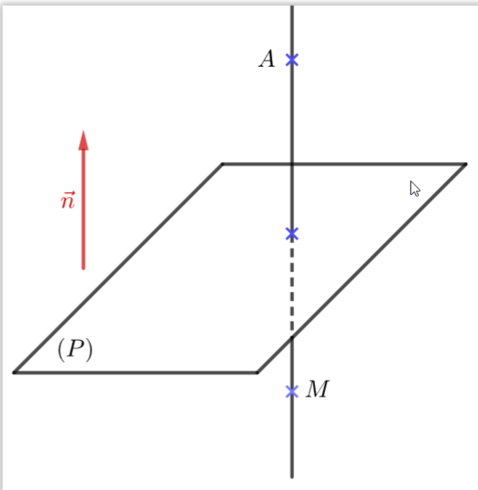
1) Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (P), et exprimer $\|\vec{n}\|$.

2) On considère la droite orthogonale au plan (P) passant par A.

Un point M appartient à la droite $d\left(A, \vec{n}\right)$ si et seulement :

il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{n}$.

Exprimer la longueur AM en fonction de λ et $\vec{n}$.



3) Donner une représentation paramétrique de cette droite en fonction du paramètre λ.

4) Démontrer qu'un point M de cette droite appartient au plan (P) si et seulement si : $\lambda=-\dfrac{F(A)}{\|\vec{n}\|^2}$.

5) En déduire la formule donnant la distance recherchée.

<u>Applications numériques</u> :

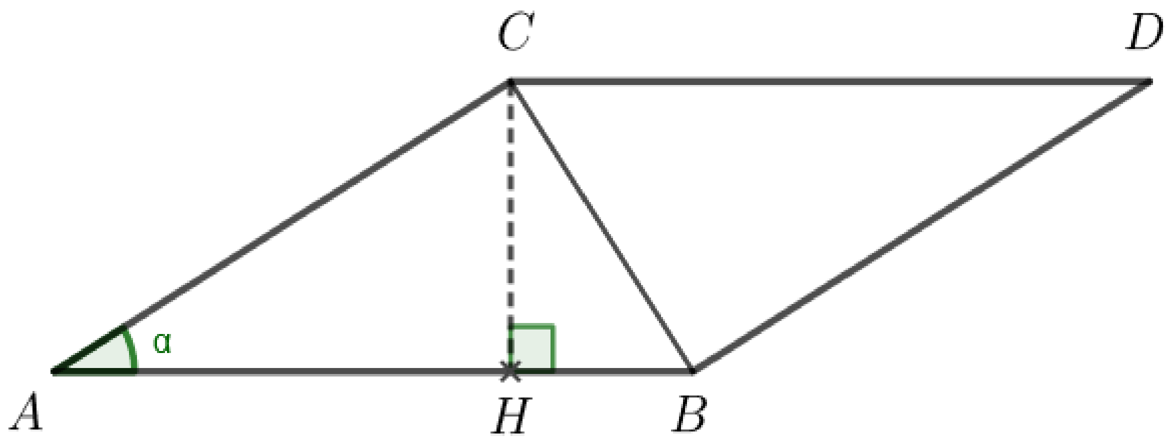
a) Déterminer une équation cartésienne du plan passant par les points suivants : $I(1\,;0\,;0)$, $J(0\,;1\,;0)$ et $K(0\,;0\,;1)$.

b) Déterminer la longueur de la hauteur issue de O du tétraèdre $OIJK$.

c) Montrer que la sphère de centre $\Omega\left(\sqrt{3}\,;1\,;\sqrt{3}\right)$ et de rayon $R=2$ est tangente au plan (IJK).

- Le produit vectoriel -

Aire d'un parallélogramme : $Aire(ABCD) = AB \times AC \times \sin\alpha$.



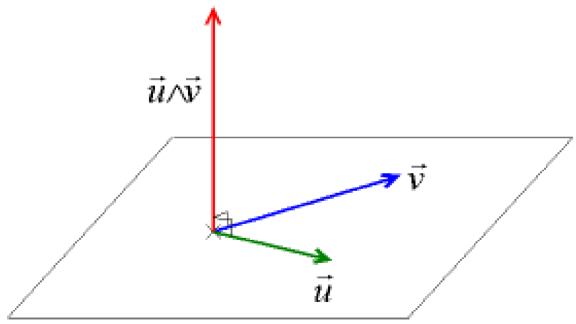
L'aire du parallélogramme $ABDC$ est égale au double de l'aire du triangle ABC .

L'aire du triangle ABC est donnée par $Aire(ABC) = \frac{1}{2}\,\text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2} AB \times CH$

et donc $Aire(ABC) = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin\alpha$, d'où le résultat.

Le produit vectoriel :

Dans l'espace, le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ orthogonal à ces deux vecteurs, et dont la norme est égale à l'aire du parallélogramme formé par ces vecteurs.



Ce vecteur se note $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ qui se lit : « w égal u vectoriel v ».

Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donc l'unique vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

$\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$

$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \left|\sin\left(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}\right)\right|$

la base $\left(\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\right)$ est dans le sens direct (règle des trois doigts)

Remarque : Dans l'espace, deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

Expression du produit vectoriel dans une base orthonormale :

Si la base de vecteurs $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est orthonormale,

alors pour tout vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de l'espace on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} yz'-zy' \\ zx'-xz' \\ xy'-yx' \end{pmatrix}$$

Exercice n°1 :

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{i} \wedge \vec{j}$.

2) En déduire une équation cartésienne du plan $(x0y)$.

Exercice n°2 :

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Calculer $\vec{w} \cdot \vec{u}$ et $\vec{w} \cdot \vec{v}$. Les résultats sont-ils cohérents ?

3) En déduire une équation cartésienne du plan passant par $A(1,1,1)$ et de base de vecteurs le couple $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$.

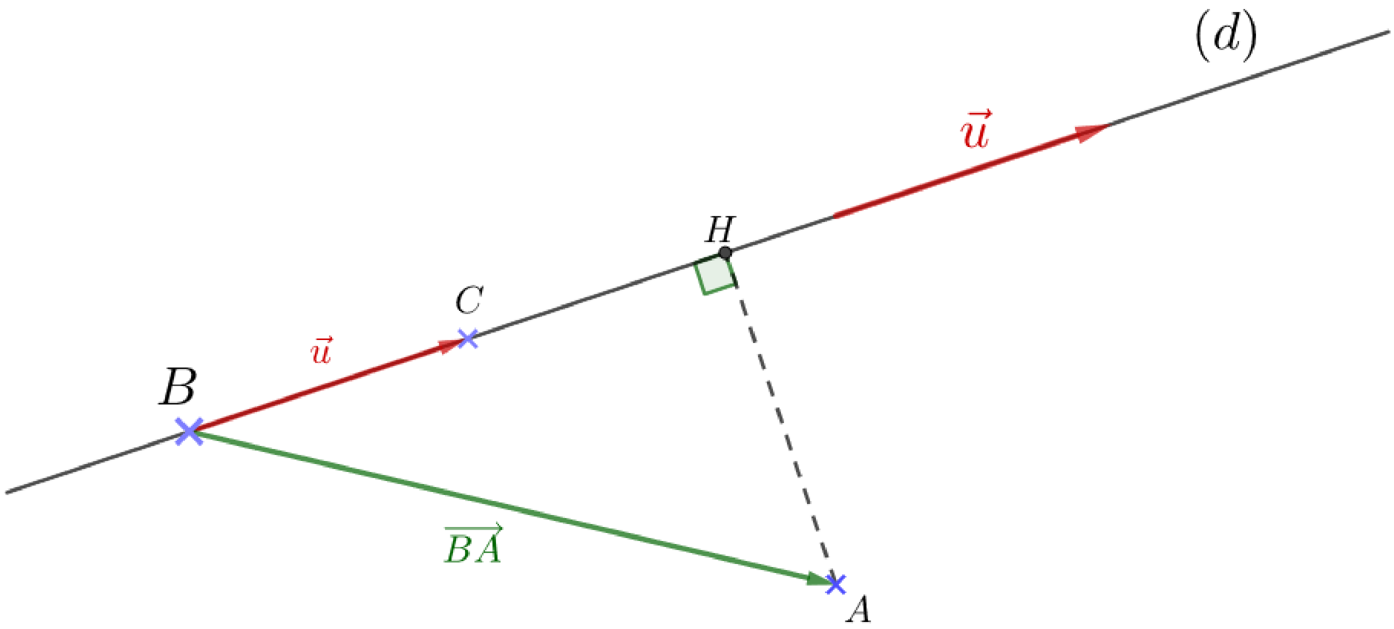
Exercice n°3 : Les points $A(1,-1,2)$, $B(0,5,3)$ et $C(4,-19,-1)$ sont-ils alignés ?

- Distance d'un point à une droite -

On considère la droite (d) passant par un point B et dirigée par un vecteur $\vec{u}$, et un point A de l'espace extérieur à la droite (d).

On cherche à déterminer la distance du point A à la droite (d).

En se plaçant dans le plan défini par la droite (d) et le point A, on peut réaliser la figure plane suivante, dans laquelle le point C est le point de la droite (d) tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{u}$, et le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d).



La distance du point A à la droite (d) est donc donné par $d(A,(d)) = AH$.

L'aire du triangle ABC est donné par $\frac{1}{2}BC \times AH = \frac{1}{2}\|\vec{u}\| \times AH$.

Mais elle est aussi égale à la moitié de l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BA}$.

On a donc $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{BA} \wedge \vec{u}\| = \frac{1}{2}\|\vec{u}\| \times AH$, ce qui donne $\boxed{d(A,(d)) = \dfrac{\|\overrightarrow{BA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}}$.

Exercice n°4 : On donne (d) : $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$ et $A(-3,-1,2)$.

Déterminer la distance exacte du point A à la droite (d).