Exemples de questions.

1) Quelle est la démarche à suivre pour démontrer qu'un quadrilatère ABCD est un carré, en utilisant les coordonnées des vecteurs.

2) On donne $A(-8;2)$, $B(3;6)$. Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$ et la longueur AB.

3) Déterminer les coordonnées du point D, symétrique du point $C(5;4)$ par rapport au point I.

4) Quelle est la nature du quadrilatère $ACBD$?

5) Déterminer les coordonnées du point E vérifiant l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0} .$$

6) Soit J le milieu de $[BC]$. Montrer que les points A, E et J sont alignés en montrant que deux vecteurs sont colinéaires.

On peut éventuellement se guider en réalisant des figures à chaque fois que nécessaire.

Correction :

1) Pour démontrer qu'un quadrilatère ABCD est un **carré** on démontre :

que c'est **parallélogramme** en montrant que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ avec les coordonnées des vecteurs

que ce parallélogramme est un **losange**, en montrant qu'il a deux côtés qui se suivent de même longueur (donc finalement 4 côtés égaux)

que ce parallélogramme est un **rectangle**, en montrant :

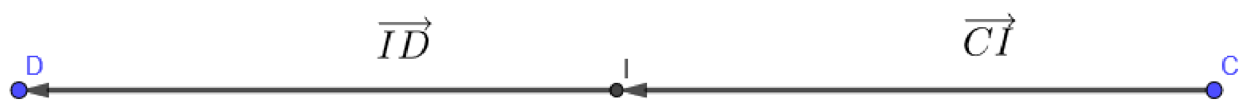
soit qu'il possède un angle droit en vérifiant l'égalité de Pythagore

soit que les diagonales ont la même longueur

et une figure qui est en même temps un rectangle et un losange est un carré

2) Les coordonnées $(x_I ; y_I)$ du point I vérifient : $\begin{cases} x_I = \dfrac{-8+3}{2} \\ y_I = \dfrac{2+6}{2} \end{cases}$ donc $I\left(-\dfrac{5}{2} ; 4\right)$.

3) D est le symétrique de C par rapport à I, donc on fait un dessin :



On a donc l'égalité de vecteurs $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{ID}$ car I est le milieu de $[CI]$.

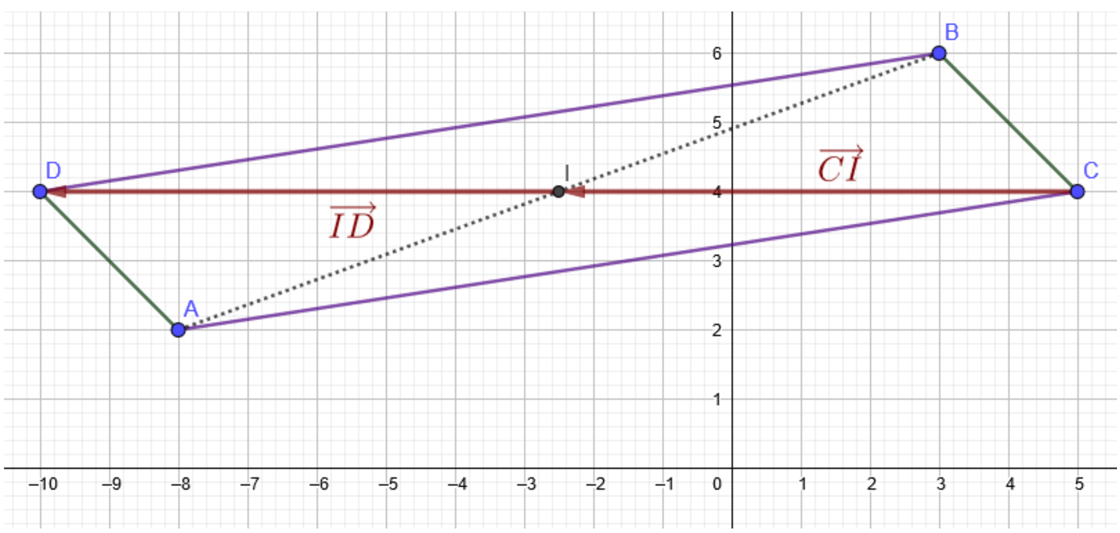
Que peut-on écrire pour obtenir le point M en partant d'un point connu et en utilisant des vecteurs connus, donc sans le point D ?

$D = C + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{ID} = C + 2\times\overrightarrow{CI}$ et c'est gagné !

En passant aux coordonnées on obtient les valeurs de x_D et y_D :

$D(x_D ; y_D) = C(5;4) + 2\times\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix} -\dfrac{15}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui donne $\begin{cases} x_D = 5 - 2\times\dfrac{15}{2} \\ y_D = 4 + 2\times 0 \end{cases}$ donc $D(-10;4)$.

4) En faisant un dessin encore on voit bien la situation, ce qui est plus simple à expliquer ensuite :



I est le milieu de $[CD]$ et $[AB]$, donc les diagonales se coupent en leur milieu, donc ACBD est un parallélogramme.

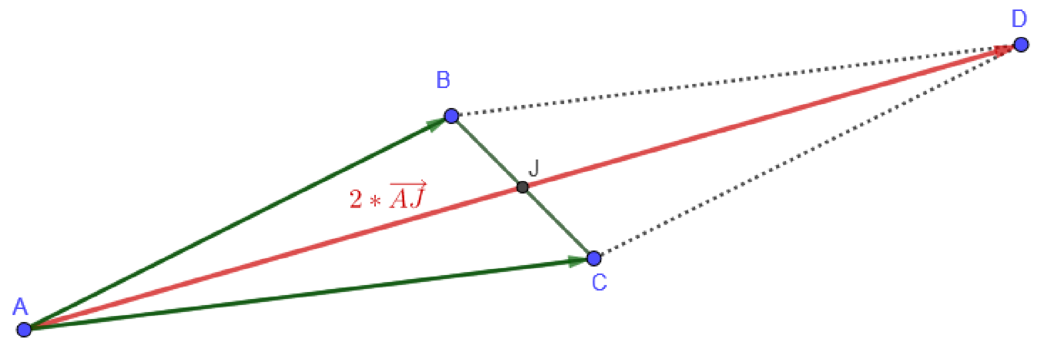
5) En partant de $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{0}$ on essaye d'exprimer par exemple le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de vecteurs sans le point E, en utilisant la relation de Chasles :

$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{0}$ donne $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$ donc $3\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$

ce qui donne $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{EA}$ ou encore $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Cette égalité donne alors $E=A+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ ce qui permet de déterminer les coordonnées du point E.

6) Si J est le milieu de $[BC]$, alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AJ}$ qui est un résultat à connaître.



On a donc $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\times 2\overrightarrow{AJ}$ donc $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$

ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires,
donc que les points A, E et J sont alignés.