# Les vecteurs

## Les déplacements connus d'une figure :

i) Symétrie axiale, exemple :

A et A' symétriques par rapport à (d) si et ssi : (d) est la médiatrice du segment [AA']
Une figure et sa symétrique ont les mêmes dimensions, en sens inverse.

ii) Symétrie centrale, ou demi-tour, exemple :

B et B' symétriques par rapport à I si et ssi I est le milieu du segment [BB']
Une figure et sa symétrique ont les mêmes dimensions, et dans le même sens.

iii) Déplacement en ligne droite : translations

Construire la figure (F') image de (F) dans la translation de vecteur $\vec{u}$ :
Une figure et sa symétrique ont les mêmes dimensions, sans rotation.

## 1) Translations et vecteurs :

Définition 1 : Une **translation** est un **déplacement rectiligne** (en ligne droite).

Ce déplacement est caractérisé par un vecteur $\vec{u}$ qui possède :

- une **direction** (droite)
- un **sens** (flèche)
- une **longueur** appelée **norme** du vecteur $\vec{u}$ et notée $\|\vec{u}\|$.

L'image du point $A$ dans la translation de vecteur $\vec{u}$ s'écrit en vecteurs : $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.

Le déplacement de $A$ à $M$ est la translation de vecteur $\vec{u}$.

figure avec plusieurs vecteurs $\vec{u}$

Exemple : Image d'une figure dans la translation de vecteur $\vec{u}$ .

Les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ , $\overrightarrow{BB'}$ et $\vec{u}$ sont égaux, car ils représentent tous le même déplacement.
On pourra écrire que : $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ , et on remarque que $AA'B'B$ est un parallélogramme.

Un vecteur ne doit pas du tout être vu comme un nombre, mais comme un déplacement potentiel.

En mathématiques, un nombre réel sert à représenter la position d'un point sur l'axe réel, alors qu'un vecteur sert à représenter un déplacement suivant un axe, dès lors qu'on choisit un point de départ.

Ainsi, deux vecteurs seront égaux s'ils correspondent à la même translation :

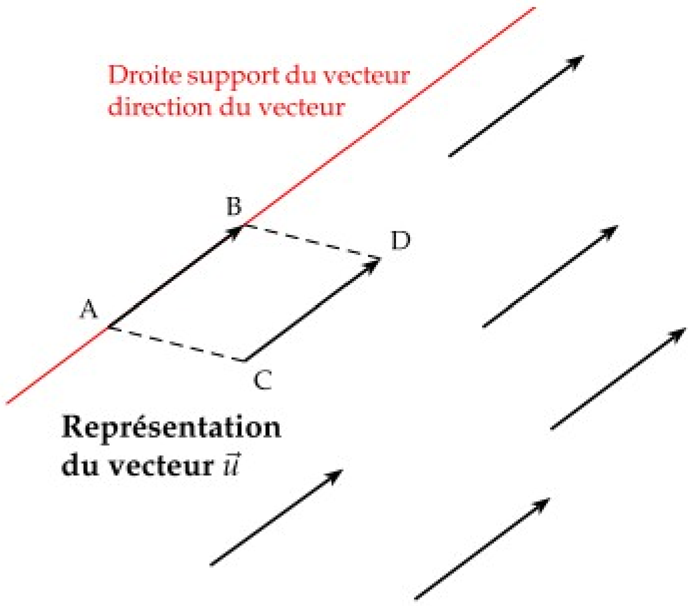
**Propriété 1** : Égalité de vecteurs

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ils ont :

- même direction : (AB) // (CD)
- même sens (les déplacements de A à B et de C à D vont dans le même sens)
- même longueur, $AB = CD$ , ou même norme : $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\|$

Donc si et seulement si ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.

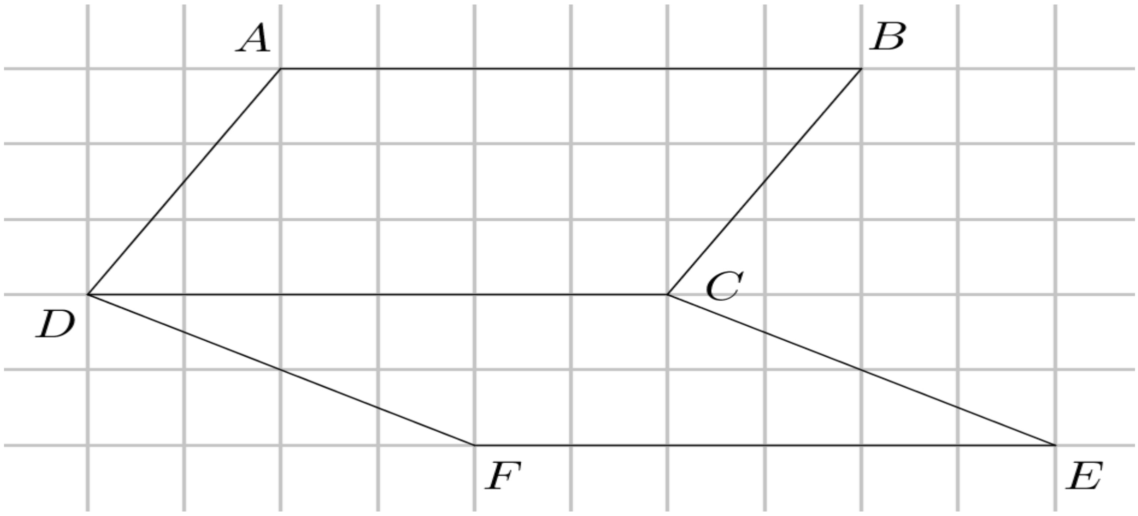
<u>Cas particulier</u> : Dans le cas où le parallélogramme ABDC est aplati, les points sont alignés, mais les diagonales aplaties ont toujours le même milieu.



Exercice : Construction du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ au compas sur une feuille blanche.

Exercices : n°3 page 256, n°23 à 29 page 268.

Exercice : ABCD et DCEF sont des parallélogrammes.
Démontrer que ABEF est un parallélogramme.




## 2) Quelques règles :

Le vecteur nul :

L'absence de déplacement correspond à la translation de vecteur nul, noté $\vec{0}$.

Ainsi, on écrira : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \ldots = \vec{0}$.

Points confondus :

Si $\overrightarrow{AB} = 0$ alors les points A et B sont confondus.

Milieu d'un segment :

I est le milieu du segment [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Exercice : savoir faire 2 page 259

## 3) Somme de deux vecteurs :

| | |
|---|---|
| Définition 2 : | En enchaînant la translation de vecteur $\vec{u}$ avec celle de vecteur $\vec{v}$ , on obtient une nouvelle translation, celle de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ . |

figure : puis construire le point $M$ tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}+\vec{v}$ sur une feuille blanche.

**Exercices n°13, 14 page 267.**

Propriété 2 : La relation de Chasles.

Soient $A$ , $B$ et $C$ trois points quelconques du plan.

Alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

figure : avec trois points non alignés, puis avec trois points alignés.

**Exercices n°15 page 267.** Exercices n° 55 page 270 et 58 page 271.

Exercice : Démontrer que si IJKL est un parallélogramme alors $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{IK}$ .

**Exercices n°56, 58 et 59 page 271.**

## 4) Différence de deux vecteurs :

Définition 3 :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits opposés si et ssi $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ .

On écrira alors : $\vec{v}=-\vec{u}$ .

Par exemple, on a : $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ .

Remarque : Deux vecteurs opposés ont même direction et même longueur, mais des sens contraires.

figure : à faire...

**Définition 4** :

Le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est défini par : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right)$.

figure à faire...

**Exercice n° 61 page 271**.

Exercice : Soit E, F, G et H quatre points du plan. Démontrer que si $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EH}$ alors EFHG est un parallélogramme.

## 4) Vecteurs colinéaires :

**Produit d'un vecteur par un nombre réel** :

Par exemple, $3\vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$ ou $-2\vec{v} = -\vec{v} - \vec{v}$.

--------> figure

Les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont toujours la même direction.
Si $k > 0$ ils ont en plus le même sens, et des sens contraires si $k < 0$.

Exercice : Montrer que dans un triangle $ABC$ on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ avec $I = m[AC]$.

**Définition 5** :

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils ont même direction, mais pas nécessairement le même sens.

figure...

Remarque : vecteurs colinéaires = directions parallèles

**Propriété 3** : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et si et seulement si l'un est multiple de l'autre par un nombre réel.

Autrement dit : $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$ si et ssi il existe un réel $k$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

figure : à faire...

Exercices avec un quadrillage et reconnaître des vecteurs colinéaires puis trouver le coefficient de colinéarité.

Application de la colinéarité pour prouver un parallélisme ou un alignement de points :

Propriété 4 : Parallélisme et alignement

- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CD}$.
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.

Exercice :

ABC est un triangle et I est le milieu de [AB].

1) a) Construire le point J tel que : $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

2) On note K le point tel que : $2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$.

a) Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Placer K.

b) En déduire que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Quelle relation lie $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ? Que peut -on conclure ?