# Vecteurs et coordonnées

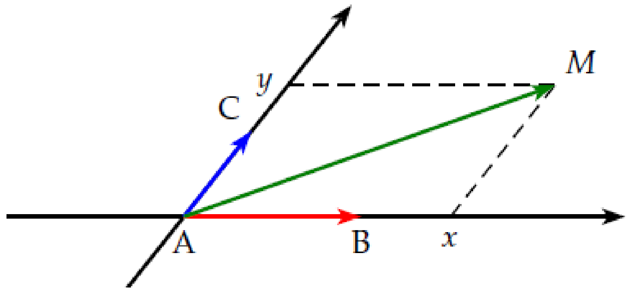
## 1) Repères :

Trois points A, B, C non alignés du plan définissent un repère : $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

On a alors : $M(x;y)$

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$$

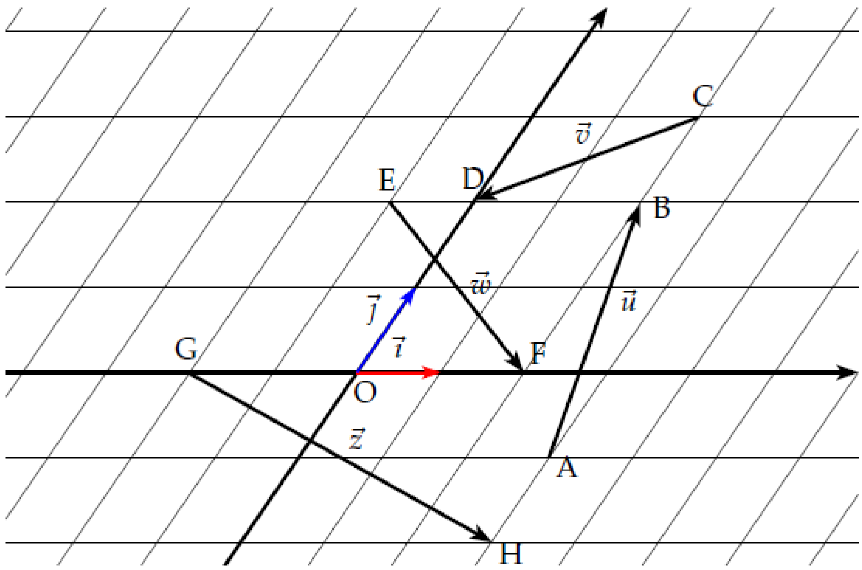
on écrit $\overrightarrow{AM}\,(x;y)$




D'une autre façon, un repère est défini par :

- un point origine : O.
- 2 vecteurs non colinéaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. Le couple $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une « base » du plan, c'est à dire que ce couple peut engendrer tous les vecteurs du plan.

L'ensemble $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ définit un repère du plan.




On peut alors lire les coordonnées des points de A à H.

$A(3;-1)$, $B(2;2)$, $C(2;3)$, $D(0;2)$, $E(-1;2)$, $F(2;0)$, $G(-2;0)$, $H(3;-2)$

Si on considère un point M de coordonnées $(x;y)$ quelconque, on a alors à l'aide des vecteurs de base $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \quad \text{que l'on écrit} \quad \overrightarrow{OM}\,(x;y)$$

De même les on peut lire les coordonnées des vecteurs de $\vec{u}$ à $\vec{z}$

$$\vec{u}(-1;3), \quad \vec{v}(-2;-1), \quad \vec{w}(3;-2), \quad \vec{z}(5;-2)$$

On peut alors traduire les vecteurs de $\vec{u}$ à $\vec{z}$

$$\vec{u} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}, \quad \vec{v} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath}, \quad \vec{w} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}, \quad \vec{z} = 5\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$$

**Remarque** : Notations des coordonnées d'un point M ou d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ :

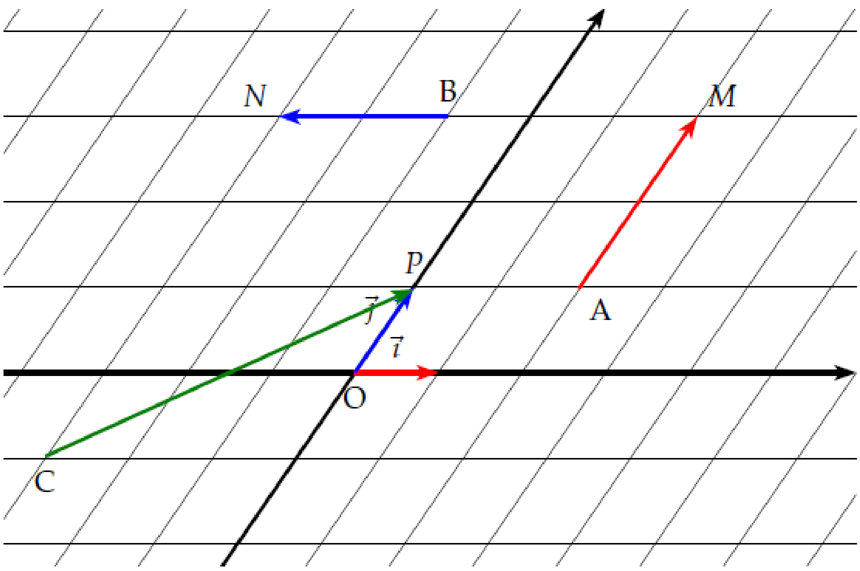
Notation matrice ligne : $M(x;y)$ et $\overrightarrow{OM}\,(x;y)$

Notation matrice colonne : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Par exemple dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ :

Placer les points A, B, C, M, N et P dans un repère quelconque tels que :

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{OB} = -1\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{OC} = -3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$$
$$\overrightarrow{AM} = 0\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{BN} = -2\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{CP} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$$



## 2) Coordonnées de vecteurs :

**Propriété 1** : Soient deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ dans un repère quelconque $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On a les relations suivantes :

1) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

2) Les coordonnées du milieu $I$ de $[AB]$ sont : $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.

**Exercice** : Le plan est muni d'un repère quelconque. Dans chacun des cas suivants, donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du milieu $I$ du segment $[AB]$.

1) $A(1;-5)$ et $B(3;-9)$
2) $A(-3;\sqrt{2})$ et $B(2;-\sqrt{2})$
3) $A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ et $B\left(\frac{1}{3};-5\right)$

## 3) Opérations sur les coordonnées de vecteurs :

**Propriété 2** : Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

1) $\vec{u}=\vec{v}$ si et seulement si : $\begin{cases}x=x'\\y=y'\end{cases}$ ;

2) Les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ sont : $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$

3) Les coordonnées du vecteur $\vec{u}-\vec{v}$ sont : $\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$

4) Les coordonnées d'un vecteur $a\vec{u}+b\vec{v}$ sont : $\begin{pmatrix}ax+bx'\\ay+by'\end{pmatrix}$.

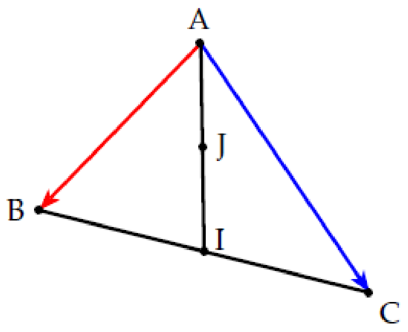
**Exemple :** ABC est un triangle, I est le milieu de [BC] et J le milieu de [AI]. On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

1) Calculer les coordonnées de I et J.

2) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que :

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC}$$

1) Faisons une figure et déterminons les coordonnées de I et J.




On a donc dans ce repère :
A(0;0), B(1;0) et C(0;1).
On obtient alors :

$$I = \begin{pmatrix} \dfrac{0+1}{2} \\ \dfrac{1+0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2) On calcule le vecteur $\vec{u}$ : $\vec{u} = 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4} \\ 1-\dfrac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{4} \end{pmatrix}$$

**Autre exemple dans un repère orthonormal**

Les points A, B et C sont tels que : $A(-2;-3)$, $B(5;0)$ et $C(0;7)$. G est le centre de gravité du triangle ABC.

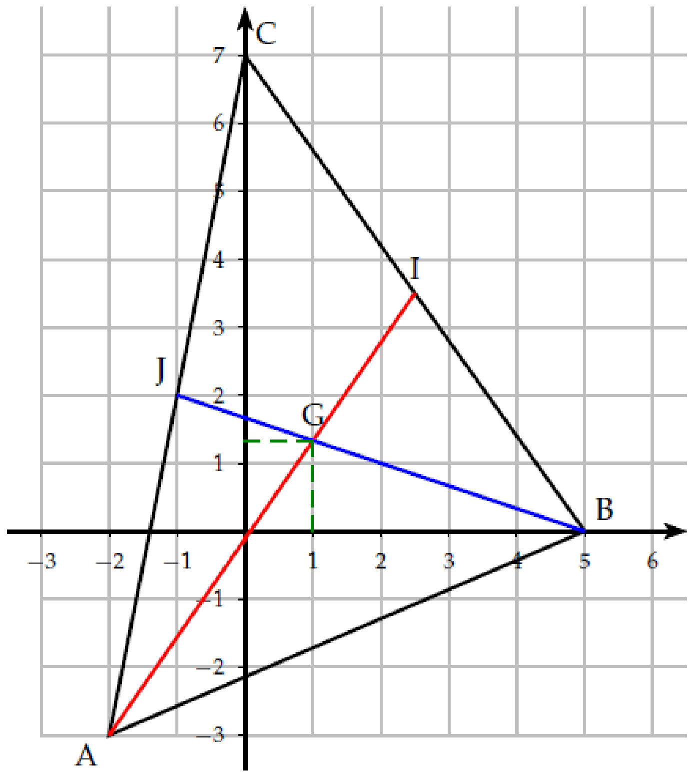
1) a) Calculer les coordonnées du milieu I de [BC].

b) Quel est le nombre $k$ tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AI}$ ?

c) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$. En déduire celles de $\overrightarrow{AG}$ puis celles de G.

2) Prouver que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

1) a) Faisons d'abord une figure :




On trouve alors les coordonnées de I : $\mathrm{I} = \left(\dfrac{5+0}{2}\,;\,\dfrac{0+7}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{7}{2}\right)$

b) D'après les propriétés du centre de gravité on a : $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AI}}$

c) Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ puis de G.

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \left(\frac{5}{2}+2\,;\,\frac{7}{2}+3\right) = \left(\frac{9}{2}\,;\,\frac{13}{2}\right) \qquad \overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\,;\,\frac{13}{2}\right) = \left(3\,;\,\frac{13}{3}\right)$$

Si on appelle $(x;y)$ les coordonnées de $G$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x-(-2)=3 \\ y-(-3)=\dfrac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

2) En utilisant un calcul matriciel, on a :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\begin{pmatrix}-2-1\\-3-\frac{4}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5-1\\0-\frac{4}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0-1\\7-\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-\frac{13}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\\frac{17}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3+4-1\\-\frac{13}{3}-\frac{4}{3}+\frac{17}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

L'égalité : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ correspond à la définition vectorielle du centre de gravité d'un triangle.

## 4) Colinéarité de vecteurs :

Rappel de la définition :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si :

- ils indiquent une même direction (pas toujours le même sens)
- l'un est multiple de l'autre, ou encore :
  - il existe un nombre réel $k$ tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.
  - il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases}x'=kx\\y'=ky\end{cases}$, donc les coordonnées sont proportionnelles
  - $\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=k$ ou encore $xy'=x'y$.

Exercice : Déterminer le coefficient de colinéarité $k$ éventuel dans les exemples suivants :

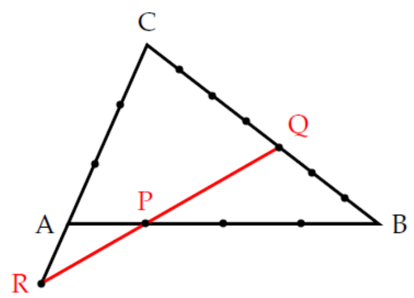
1) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ 2) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$ 3) $\vec{u}\begin{pmatrix}21\\-30\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-14\\20\end{pmatrix}$

Propriété 3 : Dans un repère **quelconque** $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si : $xy'=x'y$.

Exercice :

ABC est un triangle, P est un point de (AB), Q un point de (BC) et R un point de (CA) disposés comme sur le dessin. Les graduations sur les droites sont régulières. Démontrer que les points P, Q et R sont alignés.




Exercice : n° 7 de la fiche (points alignés et droites parallèles).

## 5) Distance entre deux points :

Propriété 3 :

- Dans un **repère quelconque** $(O;\vec{i},\vec{j})$ le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

- Dans un **repère orthonormal** $(O;\vec{i},\vec{j})$ la longueur $AB$ est telle que :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \text{ et donc } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Remarque : Un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est tel que : $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = 1$

Les axes sont alors perpendiculaires et les unités identiques sur les deux axes.

Démonstration : Cette formule découle du théorème de Pythagore :

Exercice : Démontrer que ABCD est un losange.

On donne les points suivants : $A(-4;-1)$, $B(4;-2)$, $C(8;5)$, $D(0;6)$