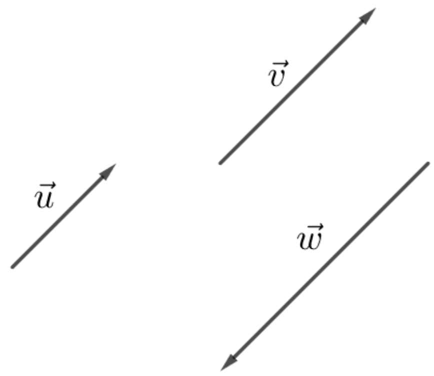
- Colinéarité de vecteurs et coordonnées -

Définition :

Deux **vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si ils ont la **même direction**.

Sur cette figure, les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

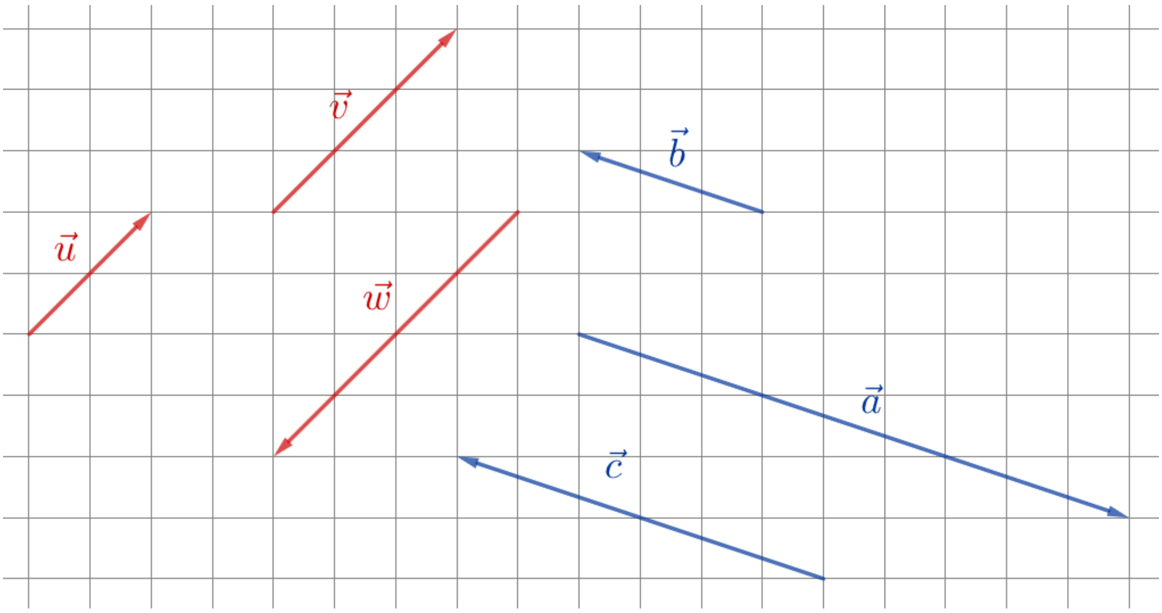


Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les autres vecteurs.

Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si l'un est un multiple de l'autre, ou encore, si et seulement si il existe un nombre réel k tel que : $\vec{u} = k \times \vec{v}$.

Exercice n°1 : On donne le graphique suivant :



Compléter par le nombre réel qui convient :

$\vec{v} = \ldots\ldots\ldots \times \vec{u}$ $\quad$ $\vec{w} = \ldots\ldots\ldots \times \vec{u}$

$\vec{b} = \ldots\ldots\ldots \times \vec{a}$ $\quad$ $\vec{c} = \ldots\ldots\ldots \times \vec{a}$

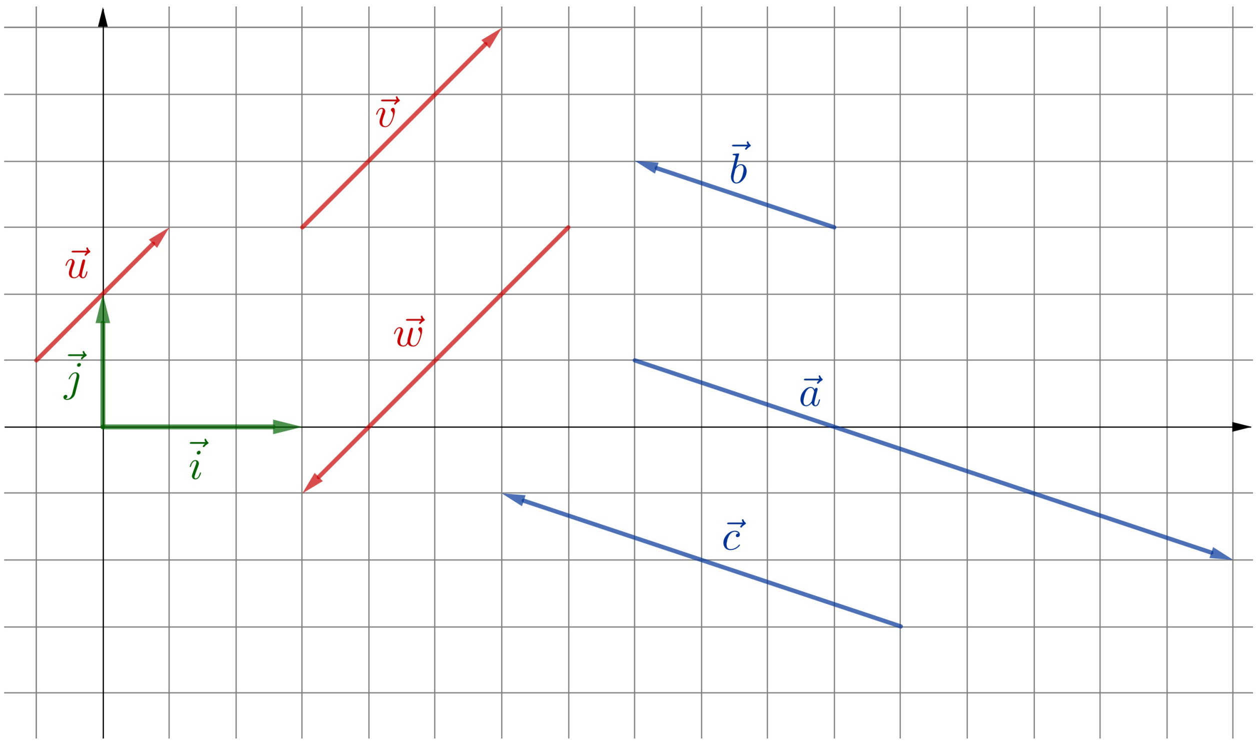
Avec les coordonnées :

Pour pouvoir donner des coordonnées à un vecteur,
il faut disposer de deux vecteurs non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Pour avoir deux vecteurs non colinéaires,
aucun des deux vecteurs ne peut être nul,
et leurs directions doivent être différentes.

Deux vecteurs non colinéaires forment ainsi une **base du plan**, parce qu'on peut toujours écrire n'importe quel vecteur en fonction des deux vecteurs de cette base.

Exercice n°2 : On donne le graphique suivant :



1) Exprimer les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2) En déduire les coordonnées de ces vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Définition : Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$:

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles,
ou encore,
si et seulement si il existe un réel k tel que $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.

Propriété : Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$:

Deux **vecteurs** $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont **colinéaires** si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Preuve :

En effet, comme le vecteur $\vec{v}$ ne peut pas être nul, sinon il serait colinéaire au vecteur $\vec{u}$, alors l'une de ses coordonnées au moins n'est pas nulle. Supposons que ce soit $x' \neq 0$.

Alors les deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que :

$x = kx'$ et $y = ky'$,

donc si et seulement si $k = \dfrac{x}{x'}$ (on peut diviser par x' non nul) et $y = ky'$,

ce qui donne $y = \dfrac{x}{x'}y'$ ou encore $yx' = xy'$, ce qui donne aussi $xy' - yx' = 0$.

Exercice n°3 : Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

2) $\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} -10 \\ -15 \end{pmatrix}$

3) $\vec{c}\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{d}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) $\vec{f}\begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{g}\begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix}$

5) $\vec{w}\begin{pmatrix} -2 \\ -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{k}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

6) $\vec{a}\begin{pmatrix} \dfrac{5}{4} \\ -\dfrac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice n°4 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix} 21 \\ -30 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -14 \\ 20 \end{pmatrix}$

4) $\vec{u}\begin{pmatrix} 18 \\ -27 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -30 \\ 45 \end{pmatrix}$

5) $\vec{u}\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{7}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{20}{9} \end{pmatrix}$

Application de la colinéarité :

1) Pour démontrer que deux droites sont parallèles :

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Car les deux droites sont parallèles si leurs directions (les deux vecteurs) sont les mêmes.

2) Pour démontrer que trois points sont alignés :

Les trois points A, B et C sont alignés si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Car deux droites parallèles avec un point en commun donne trois points alignés.

Remarque : Il suffit de prendre deux vecteurs avec un des trois points en commun.

Exercice n°5 : Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne les points suivants :

$$A(-5;1),\ B(0;3),\ C(3;2),\ D(8;4),\ E(-7;-2) \text{ et } F(9;-1).$$

1) Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
2) Les droites (AC) et (EF) sont-elles parallèles ?
3) Les points C, D et E sont-ils alignés ?
4) Les points B, C et F sont-ils alignés ?

Exercice n°6 : Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points suivants :

$$A(3;0),\ B(-1;2),\ C(-3;-2) \text{ et } D(1;-4).$$

1) Démontrer que $ABCD$ est un carré.

2) Déterminer les coordonnées du point E symétrique de A par rapport à C.

3) Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

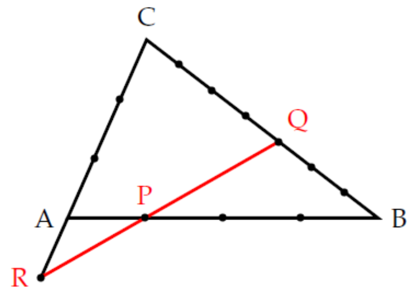
A quoi correspond ce point dans la figure ? Et pourquoi ?

4) Déterminer les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$.

5) Démonter que les points B, C et F sont alignés.

Exercice n°7 : Avec ou sans coordonnées, à vous de voir…

ABC est un triangle, P est un point de (AB), Q un point de (BC) et R un point de (CA) disposés comme sur le dessin. Les graduations sur les droites sont régulières. Démontrer que les points P, Q et R sont alignés.



Un exercice un peu plus difficile…