- Probabilités-

Lorsqu'on réalise une expérience dont on ne peut pas connaître l'issue à l'avance, on cherche alors un moyen de connaître le nombre de chance d'obtenir telle ou telle autre issue parmi toutes les issues possibles de cette expérience.

C'est le domaine des probabilités qui fournit les méthodes pour déterminer ces possibilités.

Dans tout calcul de probabilités, il faut :

1) Une expérience aléatoire :

il s'agit d'un protocole bien précis comme une règle du jeu dont on ne peut pas prévoir l'issue :

- un lancer de dé
- un lancer de pièce de monnaie
- choisir deux élèves au hasard parmi trente élèves
- poser une question au hasard à un lycéen au hasard

2) Repérer toutes les issues possibles de l'expérience :

- il y a 6 issues possibles pour un lancer de dé : $\{1;2;3;4;5;6\}$
- il y a 2 issues possibles pour un lancer de pièce : pile ou face : $\{P;F\}$
- il y a 435 paires d'élèves possibles parmi 30 élèves
- il y a 1200 lycéens dans l'échantillon qui peuvent être interrogés

3) Déterminer ce que l'on cherche comme issue :

- obtenir un multiple de trois avec un dé
- obtenir face avec une pièce
- obtenir une paire de délégués respectant la parité homme-femme
- obtenir un lycéen âgé de moins de dix-sept ans

1) Vocabulaire, définitions et notations :

Définitions 1 :

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on peut pas prévoir l'**issue**.

L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience aléatoire, souvent noté Ω **("oméga")**

Un **événement** $\boldsymbol{A}$ est **une partie de l'univers** Ω de l'expérience aléatoire : $\boldsymbol{A} \subset \Omega$.

Un événement **élémentaire** est un événement ne comportant qu'**une seule issue**.

L'**événement contraire** d'un événement A se note $\overline{A}$.

Un **événement** qui ne peut jamais se réaliser est dit **impossible**.

Un **événement** qui se réalise toujours est dit **certain**.

Exemple : Expérience aléatoire observée = lancer d'un dé à six faces.

L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble $\Omega = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$.

L'événement A : « obtenir un nombre pair » correspond à l'ensemble $A = \{ 2 , 4 , 6 \}$.

$\overline{A} = \{ 1 , 3 , 5 \}$, l'événement contraire de A correspond à : « obtenir un nombre impair ».

L'événement E : « obtenir 6 » est un événement élémentaire qui s'écrit $A = \{ 6 \}$.

L'événement « obtenir un multiple de 9 » est un événement impossible.

L'événement « obtenir moins de 9 » est un événement certain.

Exercice n° 1 : On lance deux dés à 6 faces et on ajoute les points obtenus.

1) Quel est l'univers Ω de cette expérience aléatoire ?
2) Écrire l'événement A « obtenir une somme impaire » sous forme d'un ensemble.
3) Écrire l'événement $\overline{A}$ sous forme d'un ensemble.
4) Donner un événement élémentaire B , sous forme de phrase puis d'un ensemble.
5) Décrire un événement impossible C , puis un événement certain D .

2) Calculs de probabilités :

Il y a principalement deux situations dans lesquelles on peut évaluer les chances qu'un événement se réalise lors d'une expérience aléatoire :

- A partir d'une étude statistique réalisée sur un échantillon suffisamment important et représentatif de la situation que l'on souhaite étudier.
- Dans les situations d'équiprobabilité, c'est-à-dire lorsque toutes les issues possibles ont exactement les même chances d'être réalisées.

1) A partir d'une **étude statistique** :

Par exemple, on a lancé un très grand nombre de fois un dé cubique truqué et on a relevé les fréquences d'apparition de chaque faces dans le tableau suivant :

Issues possibles (faces)	1	2	3	4	5	6	Total
Fréquences d'apparitions	0,1	0,4	0,1	0,2	0,05	0,15	1

On peut donc dire, à partir de cette étude statistique, que la probabilité d'obtenir la face 2 est de $0{,}4$ ou encore $40\ \%$.
La probabilité d'obtenir au moins 5 est de $0{,}05+0{,}15=0{,}20$ soit $20\ \%$.

2) Dans une situation d'**équiprobabilité** :

C'est le cas lorsque toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire ont la même probabilité.
Par exemple, lors du choix au hasard d'une carte d'un jeu de 32 cartes, toutes les cartes ayant la même chance d'être choisies, chacune d'entre elles a une chance sur 32 d'être choisie. Ainsi, la probabilité d'obtenir un As est de 4 chances sur 32 puisqu'il y a 4 As dans le jeu.

Définition 2 : On appelle e_1, e_2, ..., e_n les n issues possibles d'une expérience aléatoire.

Son univers est donc l'ensemble $\Omega = \{ e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n \}$.

On appelle probabilité d'une issue e_i le nombre $P(e_i)$ compris entre 0 et 1 tel que :

$$p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = 1$$ (la somme des probabilités doit toujours faire 1)

Donner la loi de probabilité de cette expérience, c'est déterminer toutes les probabilités des issues e_i de l'univers Ω de cette expérience aléatoire.

Exercice n° 2 : On a lancé 1 000 fois un dé truqué. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Numéro sorti	1	2	3	4	5	6
Nombre de sorties	82	120	153	207	265	

1) Établir la loi de probabilité de ce dé.

2) Donner la probabilité de l'événement « obtenir un multiple de 3 ».

Propriété 1 : On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.

Pour tout événement A, la probabilité de A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des issues qui le composent. On a toujours $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Si toutes les issues ont la même probabilité d'apparition, on dit que la loi est **équirépartie**, ou que l'on est dans une situation d'**équiprobabilité**.

Dans ce cas on a : $P(A) = \dfrac{\text{nombres d'issues qui réalisent } A}{\text{nombre d'issues total}}$.

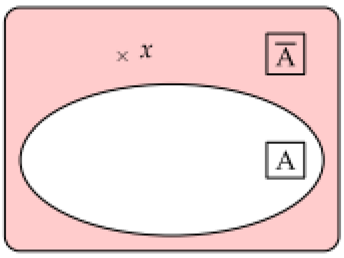
Exercice n°3 : Une urne contient 10 billes indiscernables au toucher.
3 sont vertes (V), 3 sont bleues (B) et 4 sont jaune (J).
On choisit une bille au hasard dans cette urne.
Déterminer la loi de probabilité de cette expérience.
Donner la probabilité d'obtenir une bille qui ne soit pas verte.

3) Opérations sur les événements :

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω, et deux événements A et B.

a) On appelle **événement contraire** de l'événement A l'événement noté $\overline{A}$ qui est composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.

On peut visualiser $\overline{A}$ par le diagramme de Venn suivant :



$x \in \overline{A}$ si et seulement si $x \in \Omega$ et $x \notin A$.

Exemples :

On lance un dé :

A : faire au moins 3, donc $\overline{A}$: faire au plus 2

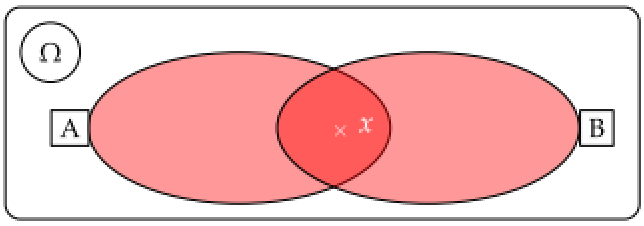
On tire deux cartes dans un jeu de 32 :

B : obtenir au moins un cœur, donc $\overline{B}$: n'obtenir aucun cœur

b) L'**intersection** des événements A et B est l'événement, noté $A \cap B$ composé des éléments de Ω qui appartiennent à A et à B.

On peut visualiser $A \cap B$ sur le diagramme de Venn suivant :

$x \in A \cap B$ si et seulement si $x \in A$ et $x \in B$.



Lorsque l'événement A est inclus dans l'événement B, on a alors :

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

Lorsque les événements A et B sont **incompatibles**, leur intersection est vide.

$$A \text{ et } B \text{ incompatibles} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

C'est le cas des événements A et $\overline{A}$: $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Exemples :

- On tire une carte d'un jeu de 32 :

$\left.\begin{array}{l} A : \text{« obtenir un cœur »} \\ B : \text{« obtenir une dame »} \end{array}\right\}$ donc $A \cap B$: « *obtenir la dame de cœur* ».

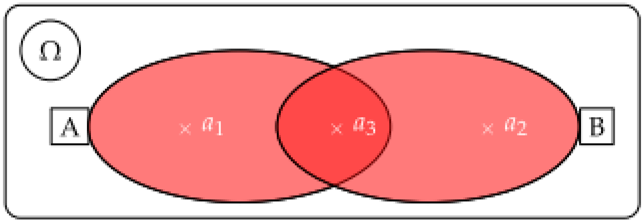
- Une classe de seconde est constituée de filles et de garçons. Les élèves sont âgés de 15 à 17 ans. On interroge un élève au hasard.

$$\left.\begin{array}{r} A: «\textit{l'élève est un garçon}» \\ B: «\textit{l'élève a 15 ans}» \end{array}\right\} \text{ Donc } A \cap B: «\textit{l'élève est un garçon de 15 ans}» .$$

c) L'**union** des événements A et B est l'événement, noté $A \cup B$, composé des éléments de Ω qui appartiennent à A ou à B, éventuellement aux deux, car le « ou » n'est pas exclusif en mathématiques.

On peut visualiser $A \cup B$ sur le diagramme de Venn suivant :

$x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in A$ *ou* $x \in B$



Lorsque l'événement A est inclus dans l'événement B, on a alors :

$$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$$

L'union des événements A et $\overline{A}$ donne l'univers Ω : $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Exemples :

On tire une carte d'un jeu de 32 :

$$\left.\begin{array}{r} A: «\textit{obtenir un cœur}» \\ B: «\textit{obtenir une dame}» \end{array}\right\} \text{ donc } A \cup B: «\textit{obtenir une dame ou un cœur}» .$$

Une classe de seconde est constituée de filles et de garçons. Les élèves sont âgés de 15 à 17 ans. On interroge un élève au hasard.

$$\left.\begin{array}{r} A: «\textit{l'élève est un garçon}» \\ B: «\textit{l'élève a 15 ans}» \end{array}\right\} \text{ Donc } A \cup B: «\textit{l'élève est un garçon ou a 15 ans}» .$$

Propriété 2 : Si A et B sont deux événements, alors on a :

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

$$P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B).$$

Si les événements sont incompatibles, alors : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Exemples :

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire avec $P(A)=0,3$,

$P(A\cup B)=0,7$ et $P(A\cap B)=0,2$. Calculons $P(B)$ et $P(\overline{B})$.

$P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)$ donne $P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)=0,7+0,2-0,3=0,6$

$P(A)+P(\overline{A})=1$ donne $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,6=0,4$

Exercice n°4 : Le tableau suivant montre la répartition des personnels d'une usine.

	Cadres	Ouvriers	Total
Hommes	100	200	300
Femmes	50	150	200
Total	150	350	500

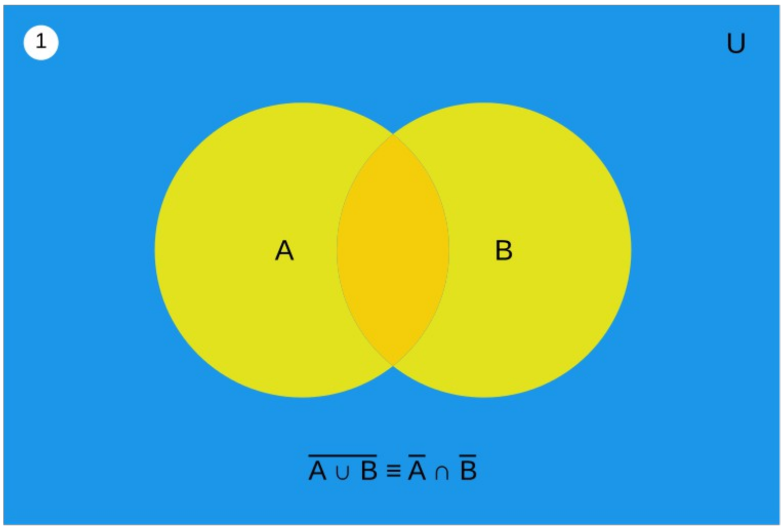
On rencontre une personne au hasard. On note H l'événement : « la personne est un homme », et C l'événement : « la personne est un cadre ».

Calculer les probabilités suivantes : $P(H)$, $P(C)$, $P(\overline{C})$, $P(H\cap C)$ et $P(H\cup C)$.

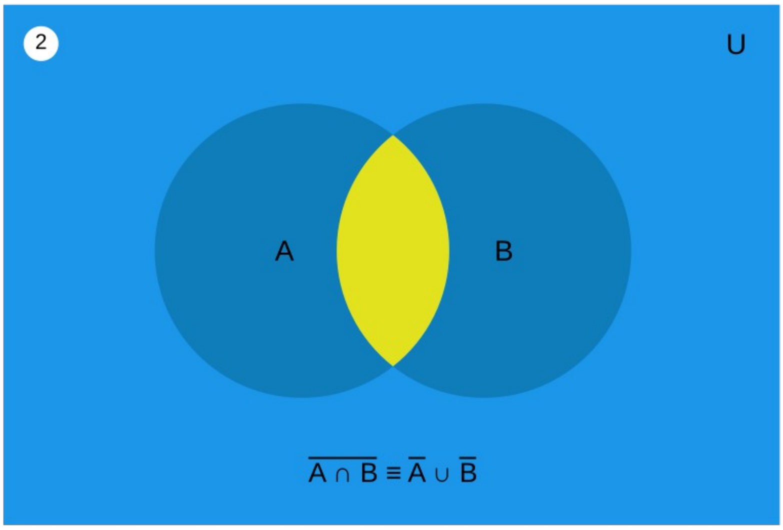
Propriété 3 : Les deux lois de Morgan.

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \qquad \text{et} \qquad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

Le contraire d'un « Ou » c'est un « ET ».



Le contraire d'un « Et » c'est un « Ou ».



Exemples de situations à savoir traiter :

Exercice n°5 :

Une classe de première compte 28 elèves. 12 d'entre eux pratiquent la natation, 7 le volley-ball et 13 ne pratiquent ni la natation, ni le volley-ball.
On désigne au hasard un élève de la classe. Calculer la probabilité qu'il pratique :

1) les deux sports
2) l'un au moins des deux sports.

Exercice n°6 :

Dans une mercerie, le stock de pelotes à tricoter comporte trois qualités : pure laine, laine mélangée et coton. On s'intéresse aux couleurs écru et bleu, on constate qu'il y a au total 2 000 pelotes.

- La moitié de ces pelotes est en laine mélangée et 40 % des pelotes en laine mélangée sont écrues.
- Il y a 1 200 pelotes écrues au total.
- 20 % des 2 000 pelotes sont en coton et il n'y a pas de coton bleu.

1) Complétez le tableau suivant :

	pure laine	laine mélangée	coton	total
écru				
bleu				
total				

2) Un enfant choisit au hasard une pelote parmi les 2 000 pelotes. Toutes les pelotes ont la même probabilité d'être choisies.
On considère les événements suivants :
B : « la pelote est bleue » et L : « la pelote est en pure laine »
   a. Calculer P(B) et P(L).
   b. Définir par une phrase en français les événements $\overline{B}$, $B \cap L$ et $B \cup L$. Calculer leurs probabilités.

Exercice n°7 :

Un paquet de 4 cartes contient un as de coeur, un roi de carreau, une dame de pique et un valet de coeur. On tire une carte dans le paquet puis, sans la remettre, on en tire une deuxième.

1) Représenter la situation par un arbre. Combien y a-t-il de tirages (de deux cartes) possibles ?
2) Calculer la probabilité des événements suivants :
   - A : Tirer une dame puis un roi.
   - B : Tirer deux figures masculines.
   - C : Tirer deux coeurs.
   - D : Tirer deux cartes noires.

4) Hasard et programmation :

Utiliser les nombres aléatoires avec l'ordinateur pour calculer des probabilités à l'aide d'un algorithme.