# - Les fonctions racine carrée et inverse -

## 1) La fonction racine carrée :

**Définition :** **Racine carrée d'un nombre réel positif :**

Si $a$ est un réel **positif**, le nombre $\sqrt{a}$ désigne l'unique réel **positif** dont le carré vaut $a$.

**Exemples :**

i) $\sqrt{3}$ existe car 3 est positif
$\sqrt{3}$ est un nombre réel positif : $\sqrt{3} \geqslant 0$
le carré de $\sqrt{3}$ est égal à 3 : $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

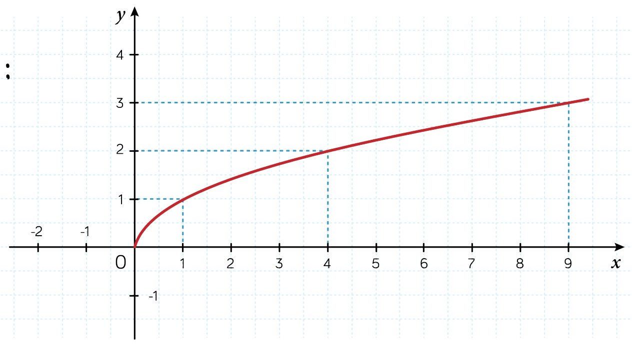
ii) si $x$ est un réel positif, alors le nombre $y = \sqrt{x}$ existe, est positif, et vérifie $y^2 = x$.

**Définition :** **La fonction racine carrée :**

C'est la fonction définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

**Tableau de variation et allure de la courbe :**

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)=\sqrt{x}$ | $0 \nearrow +\infty$ |




$f(0) = \sqrt{0} = 0$ et aussi $f(1) = \sqrt{1} = 1$

Pas de courbe pour les $x$ négatifs.

La fonction racine carrée est strictement **croissante** sur $[0;+\infty[$.

Ce qui signifie que : si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $f(0) \leqslant f(a) \leqslant f(b)$, et donc $0 \leqslant \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.

**Exemple :** comme $\pi < 4$ alors $\sqrt{\pi} < \sqrt{4}$ donc $\sqrt{\pi} < 2$.

**Règles de calcul** avec la racine carrée :

i) Pour tout réel $x$ , $x^2 \geqslant 0$ donc $\sqrt{x^2}$ existe et $\sqrt{x^2} = |x|$ « valeur absolue de $x$ ».

ii) Si $a$ et $b$ sont des réels positifs alors :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \text{ et si } b \neq 0 \text{ alors } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

*Attention* : Pas de règle de calcul avec l'addition ou la soustraction : $\sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$

<u>Remarque</u> : La valeur absolue d'un nombre réel $x$ se note $|x|$ et consiste à enlever un éventuel signe moins dans le nombre $x$ . Ainsi, le réel $|x|$ est toujours un nombre positif.
Par exemples, $|5| = 5$ et $|-3| = 3$ .
C'est la distance entre $0$ et le réel $x$ , qu'on écrit : $|x| = d(x, 0)$ .

Exemples : On a donc $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = |-6| = 6$ pour la règle i)
Et $\sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ou $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$ pour la règle ii)

*Voir les exemples d'exercices résolus page 141 pour cette première partie.*

a) Équations de la forme $\sqrt{x} = k$ :

- Si $k < 0$ l'équation n'admet pas de solution, donc $S = \varnothing$ .
- Si $k = 0$ l'équation a pour unique solution $x = 0$ , donc $S = \{0\}$ .
- Si $k > 0$ l'équation admet pour unique solution $x = k^2$ , donc $S = \{k^2\}$ .

b) Inéquations de la forme $\sqrt{x} \leqslant k$ :

- Si $k < 0$ l'inéquation n'admet pas de solution, donc $S = \varnothing$ .
- Si $k \geqslant 0$ l'inéquation a pour solutions tous les $x$ vérifiant $0 \leqslant x \leqslant k^2$ , donc $S = [0 ; k^2]$ .

c) Inéquations de la forme $\sqrt{x} > k$ :

- Si $k < 0$ l'inéquation admet tous les réels comme solution, donc $S = \mathbb{R}$ .
- Si $k \geqslant 0$ l'inéquation admet pour solution tous les $x > k^2$ , donc $S = ]k^2 ; +\infty[$ .

*Voir les exercices résolus de la page 145 pour cette deuxième partie.*

## 2) La fonction inverse :

**Définition :** **Nombres inverses :**

Deux réels $a$ et $b$ sont dits inverses l'un de l'autre si et seulement si $a \times b = 1$.

<u>Conséquences</u> :

- $a$ et $b$ ne peuvent pas être nuls, donc $0$ n'a pas d'inverse
- $a$ et $b$ sont nécessairement de **même signe** puisque leur produit est positif
- $a = \frac{1}{b}$ et $b = \frac{1}{a}$

**Exemples :**

- $5 \times 0{,}2 = 1$ donc $0{,}2$ est l'inverse de $5$, donc $0{,}2 = \frac{1}{5}$
- $\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$ donc $10^{-3}$ est l'inverse de $10^3$
- l'inverse de $-\frac{3}{4}$ s'écrit $\frac{1}{-\frac{3}{4}}$ qui vaut $-\frac{4}{3}$
- $\frac{\sqrt{7}}{7}$ est l'inverse de $\sqrt{7}$ car $\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{7}}{1} \times \frac{\sqrt{7}}{7} = \frac{(\sqrt{7})^2}{7} = \frac{7}{7} = 1$

**Définition :** **La fonction inverse :**

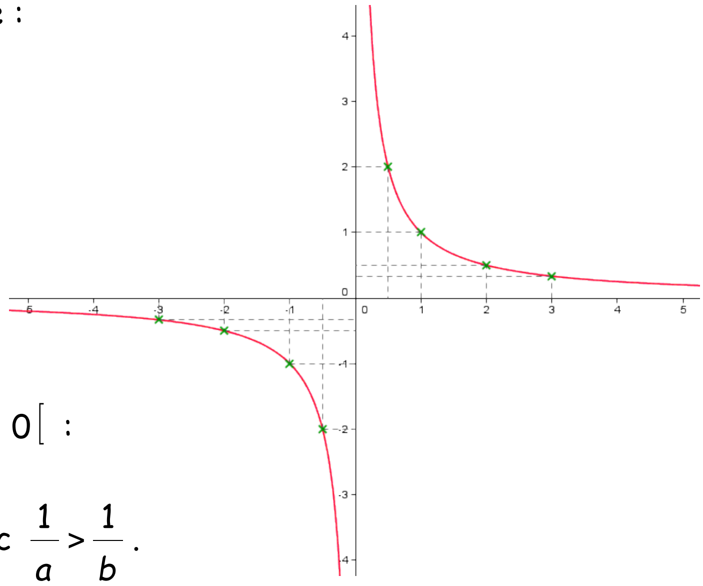
C'est la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^* = ]-\infty\,;0[ \cup ]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

<u>Remarque</u> :

Comme $0$ n'admet pas d'inverse, la fonction inverse n'est pas définie en $0$.
Sa courbe ne passe donc ni au-dessous, ni au-dessus de l'origine $O$ du repère.

**Tableau de variation et allure de la courbe :**

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)=\dfrac{1}{x}$ | $0$ ↘ | ‖ | ↘ $0$ |



i) La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ :

Donc si $a<b<0$ alors $f(a)>f(b)$ et donc $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$.

ii) La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$ :

Donc si $0<a<b$ alors $f(a)>f(b)$ et donc $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

iii) La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ tout entier :

En effet, si $a<b$ on ne peut pas toujours affirmer que $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$.

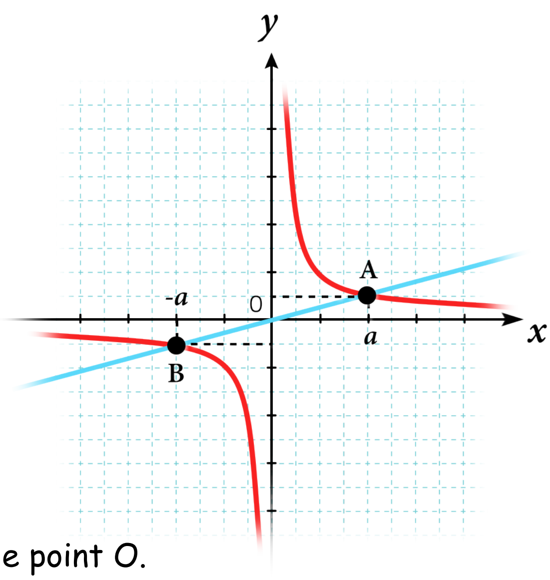
Pour cela, il faut s'assurer que les réels $a$ et $b$ sont de mêmes signes.

Par exemple, on a bien $-5<3$, mais $-\dfrac{1}{5}>\dfrac{1}{3}$ est faux !

La **courbe** représentative de la **fonction inverse** s'appelle une **hyperbole**.
Cette hyperbole est une courbe qui est **symétrique par rapport à l'origine O** du repère.

Le point $A$ a pour coordonnées $A\left(a\,;\dfrac{1}{a}\right)$.

Le point B a pour coordonnées $B\left(-a\,;-\dfrac{1}{a}\right)$.




Deux points de coordonnées $(x\,;y)$ et $(-x\,;-y)$ sont bien symétriques par rapport au point $O$, puisque les coordonnées du milieu $I$ du segment formé par ces deux points sont :

$$x_I=\frac{x-x}{2}=0 \text{ et } y_I=\frac{y-y}{2}=0\text{, donc } I(0;0) \text{ est le point O.}$$

La fonction inverse est donc une fonction impaire qui vérifie que $f(-x)=-f(x)$.

**Résolution d'équations et d'inéquations avec la fonction inverse** :

a) Équations de la forme $\frac{1}{x}=k$ :

- Si $k=0$ l'équation n'admet pas de solution, donc $S=\emptyset$.
- Si $k\neq 0$ l'équation admet une unique solution $x=\frac{1}{k}$, donc $S=\{\frac{1}{k}\}$.

b) Inéquations de la forme $\frac{1}{x}<k$ :

- Si $k<0$ l'inéquation admet pour solutions tous les réels $x$ vérifiant $x>\frac{1}{k}$ **et** $x<0$,

  donc $S=\left]\frac{1}{k}\,;0\right[$.  $\frac{1}{x}<-3$ donne $x>-\frac{1}{3}$ et aussi $x<0$

- Si $k>0$ l'inéquation admet pour solutions tous les réels $x$ vérifiant $x<0$ **ou** $x>\frac{1}{k}$,

  donc $S=]-\infty\,;0[\cup\left]\frac{1}{k}\,;+\infty\right[$.  $\frac{1}{x}<\frac{5}{3}$ donne $x>\frac{3}{5}$ ou aussi $x<0$

c) Inéquations de la forme $\frac{1}{x}\geqslant k$ :

- Si $k<0$ l'inéquation admet pour solutions tous les réels $x$ vérifiant $x\leqslant\frac{1}{k}$ **ou** $x>0$,

  donc $S=\left]-\infty\,;\frac{1}{k}\right]\cup]0\,;+\infty[$.

- Si $k>0$ l'inéquation admet pour solutions tous les réels $x$ vérifiant $x\leqslant\frac{1}{k}$ **et** $x>0$,

  donc $S=\left]0\,;\frac{1}{k}\right]$.