- La fonction cube -

Définition :

La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$.

Elle fait correspondre à tout réel x l'image $y=x^3$ le cube du réel x.

Définie sur $\mathbb{R}$ tout entier signifie qu'il est possible de calculer le cube de n'importe quel réel x, comme son carré d'ailleurs. Que le réel x soit positif, négatif ou nul.

Remarque :

- Le carré d'un nombre réel est toujours positif : $(-1)^2=1$ et $(-3)^2=9$
- Le cube d'un nombre réel peut être négatif : $(-1)^3=(-1)\times(-1)\times(-1)=-1$ et $(-2)^3=-8$

De manière générale :

- x^n est toujours positif si n est un entier pair.
- x^n est négatif si x est négatif et n est un entier impair.

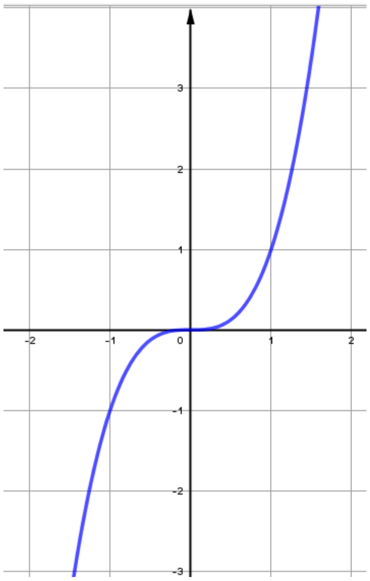
Tableau de valeurs de la fonction cube :

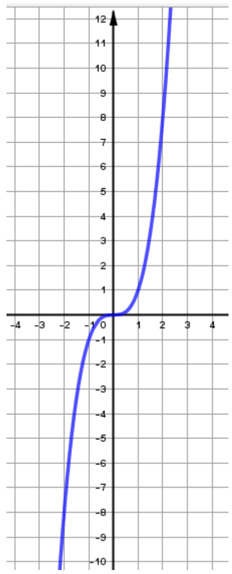
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=x^3$	-125	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64	125

La première ligne représente les antécédents x sur l'axe des abscisses.
La deuxième ligne représente les images y obtenues à partir de la fonction $f(x)=x^3$.
Ainsi, les points possédant ces coordonnées $(x;y)$ appartiennent à la courbe de la fonction cube, car leurs ordonnées s'obtiennent à partir de l'expression $y=f(x)$.

L'égalité $y=f(x)$ s'appelle l'équation de la courbe de la fonction f.

On constate sur ce tableau de valeurs que $f(-x)=-f(x)$, ce qui va entraîner une **symétrie** de la courbe représentative de la fonction cube.

<table>
<tr><th>Courbe représentative :</th><th>Tableau de variation :</th></tr>
<tr><td>


</td><td><table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)=x^3$</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>La courbe de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine O du repère.</td><td>La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.</td></tr>
</table>

La définition suivante provient du fait que la fonction cube f est strictement croissante de $\mathbb{R}$ tout entier dans $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi l'équation $f(x)=k$ admet toujours une et une seule solution.

Définition : Racine cubique.

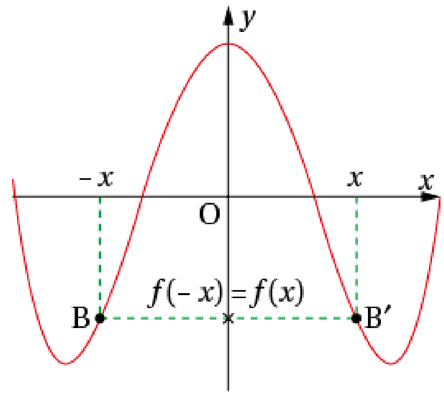
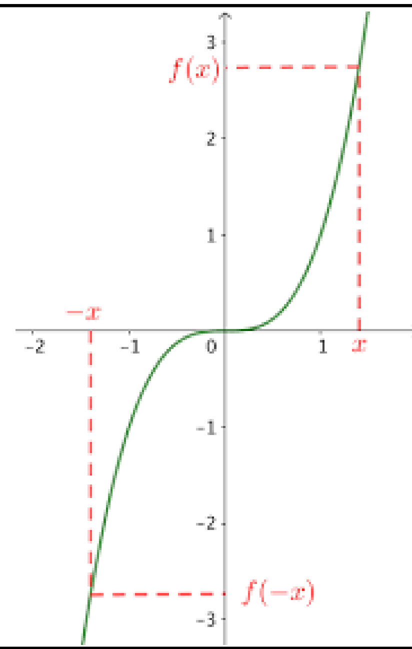
La racine cubique d'un réel k est l'unique nombre négatif ou positif dont le cube est égal à k .

Ce nombre s'écrit $k^{\frac{1}{3}}$.

Ainsi, l'équation $x^3=k$ admet toujours une et une seule solution : $x=k^{\frac{1}{3}}$.

Exemples : L'équation $x^3=0$ a une seule solution $x=0$.
L'équation $x^3=8$ a pour unique solution $x=2$ car seul $2^3=8$
L'équation $x^3=-125$ a pour unique solution $x=-5$ car seul $(-5)^3=-125$
L'équation $x^3=3{,}375$ a pour solution $x=3{,}375^{\frac{1}{3}}=1{,}5$.

Fonctions paires et fonctions impaires :

Une **fonction** f est dite **paire** si : pour tout réel x on a $f(-x)=f(x)$.	
La courbe d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe vertical**.	
Une **fonction** f est dite **impaire** si : pour tout réel x on a $f(-x)=-f(x)$.	
La courbe d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine O du repère**.	

Etudier la parité d'une fonction c'est vérifier si elle est paire, impaire, ou ni l'un ni l'autre.

Exemples :

1) Avec $f(x)=3x^2+2x-1$, on a $f(-x)=3\times(-x)^2+2\times(-x)-1=3x^2-2x-1$.

Comme $-f(x)=-3x^2+2x-1$, la fonction f n'est ni paire ni impaire.

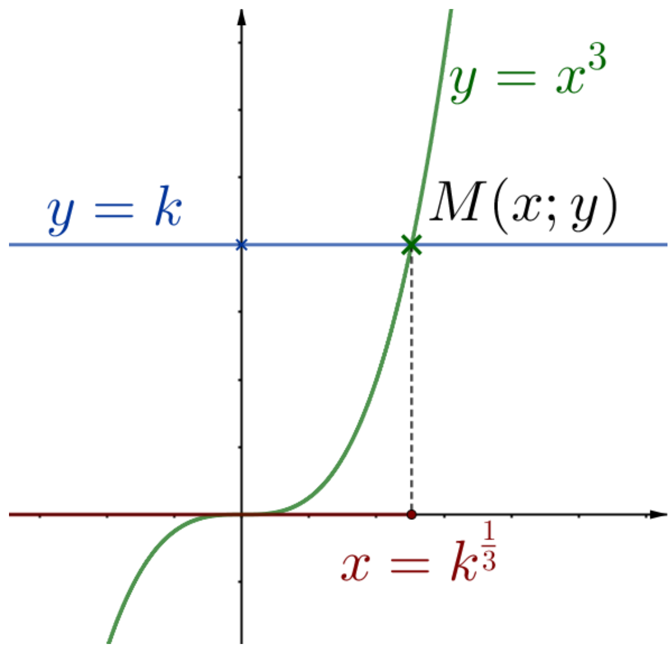
2) Avec $g(x)=x^3-7x$, on a $g(-x)=(-x)^3-7\times(-x)=-x^3+7x$.

Comme $-g(x)=-(x^3-7x)=-x^3+7x=g(-x)$, la fonction g est impaire.

Résolution d'inéquation avec la fonction cube :

1) $x^3\leqslant k$ si et seulement si $x\leqslant k^{\frac{1}{3}}$,

ce qui donne : $S=\left]-\infty;k^{\frac{1}{3}}\right]$.



2) $x^3>k$ si et seulement si $x>k^{\frac{1}{3}}$,

ce qui donne : $S=\left]k^{\frac{1}{3}};+\infty\right[$.

Exemples :

1) $x^3\geqslant 1000$ si et seulement si $x\geqslant 10$ car $10^3=1000$ et $1000^{\frac{1}{3}}=10$,

donc $S=[10;+\infty[$.

2) $x^3<0{,}001$ si et seulement si $x<0{,}1$ car $0{,}1^3=0{,}001$ et $0{,}001^{\frac{1}{3}}=0{,}1$,

donc $S=]-\infty;0{,}1[$. (x peut donc être négatif ici)

3) $x^3>-343$ si et seulement si $x>(-343)^{\frac{1}{3}}$ soit $x>-7$, donc $S=]-7;+\infty[$.