- Correction de quelques exercices du livre -

Exercice n°14 page 156 :

Puisque EFG est un triangle rectangle en E, l'égalité de Pythagore nous donne :

$EF^2+EG^2=FG^2$ donc $EG^2=FG^2-EF^2=7^2-5^2=49-25=24$.

Donc $EG=\sqrt{24}=\sqrt{4\times6}=\sqrt{4}\times\sqrt{6}=2\sqrt{6}$ la valeur exacte.

Comme $\sqrt{24}=4{,}898\ldots$, au centième près cela donne $\sqrt{24}\approx4{,}90=4{,}9$.

Exercice n°16 page 156 :

La fonction suivante définie en Python, correspond à la fonction $f(x)=3x^2-3x+1$.

```python
def f(x):
    return 3*x**2-3*x+1
```

1) Lorsqu'on écrit

```
>>> from math import sqrt
>>> f(sqrt(13))
```

dans la console Python,
cela signifie qu'on souhaite calculer $f(\sqrt{13})$.

Pour savoir si le résultat affiché pour ce calcul peut être exacte, essayons de faire le calcul nous mêmes :

$f(\sqrt{13})=3\times(\sqrt{13})^2-3\sqrt{13}+1=3\times13-3\sqrt{13}+1=40-3\sqrt{13}$ il y a donc encore $\sqrt{13}$ dans le résultat.

Si l'on est capable de donner la valeur exacte de $\sqrt{13}$, alors le résultat sera également un résultat exact.

> Le problème est qu'on est incapable de donner la valeur exacte de $\sqrt{13}$.
> Expliquer pourquoi.
> Faîtes le même calcul pour $f(-\sqrt{13})$.

2) Pour obtenir 1 comme résultat, il faut trouver x pour que $f(x)=1$, ce qui donne :

$3x^2-3x+1=1$ donc $3x^2+3x=0$ puis **on factorise** par $3x$, ce qui donne $3x(x+1)=0$

Cette équation produit admet les deux solutions $x=0$ et $x=-1$, qui sont les deux valeurs qu'on peut donner à x pour obtenir 1 .

Exercice 19 page 156 :

1) Encadrement de $\sqrt{x}$ lorsque $x \in [1;36]$:

Si $1 \leqslant x \leqslant 36$ alors $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{36}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

donc $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 6$ ou encore $\sqrt{x} \in [1;6]$.

2) Encadrement de $\sqrt{x}$ lorsque $x \in [2;+\infty[$:

Si $x \geqslant 2$ alors $\sqrt{x} \geqslant \sqrt{2}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

donc $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x}$ ou encore $\sqrt{x} \in [\sqrt{2};+\infty[$.

Exercice n°20 page 156 : $a=\sqrt{\sqrt{3}-1}$ et $b=\sqrt{\sqrt{2}-1}$

1) $3>2$ et comme la fonction racine carrée est croissante sur les réels positifs, alors $\sqrt{3}>\sqrt{2}$.

2) On en déduit tout de suite que $\sqrt{3}-1>\sqrt{2}-1$, en enlevant 1 de chaque côté de l'inégalité.

3) Vérifions que ces deux nombres sont encore positifs :

$2 \geqslant 1$ donc $\sqrt{2} \geqslant 1$ puisque la fonction racine carrée est croissante, donc $\sqrt{2}-1 \geqslant 0$.

On a donc encore le droit d'utiliser la racine carrée avec les deux nombres de la question 2 :

Comme $\sqrt{3}-1>\sqrt{2}-1>0$,
et que la fonction racine carrée est croissante sur les nombres positifs,
on a alors $\sqrt{(\sqrt{3}-1)}>\sqrt{\sqrt{2}-1}$, et donc $a>b$.

Exercice 22 page 156 : Résoudre l'équation $\sqrt{x-1}=4$.

1) $\sqrt{x-1}$ existe si et seulement si $x-1 \geqslant 0$, soit $x \geqslant 1$.

2) $\sqrt{x-1}=4$ donne $(\sqrt{x-1})^2=4^2$ soit $x-1=16$ et $x=17$ qui est bien $\geqslant 1$ donc $S=\{17\}$.

Exercice n°23 page 156 :

1) L'équation $\sqrt{3-x}=1$ n'a de sens que si $3-x \geqslant 0$ donc si $3 \geqslant x$ ou encore $x \leqslant 3$.

2) Comme il faut que $\sqrt{3-x}=1$, alors $\left(\sqrt{3-x}\right)^2=1^2$ ce qui donne $3-x=1$ et donc $x=2$.

Comme la seule solution possible est bien inférieure ou égale à 3 ,
elle est acceptable : donc $S=\{2\}$.

Exercice n°25 page 157 :

La fonction fonction racine carrée $f(x)=\sqrt{x}$ n'est définie que pour $x\geqslant 0$.
Une fonction de la forme $g(x)=\sqrt{u(x)}$ n'est définie que pour les x vérifiant $u(x)\geqslant 0$.

1) Donc $\sqrt{x-4}$ existe si et seulement si $x-4\geqslant 0$ donc si et seulement si $x\geqslant 4$.

2) Si $\sqrt{x-4}\geqslant 2$ alors $\left(\sqrt{x-4}\right)^2\geqslant 2^2$ (car la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+=[0\,;+\infty[$).

(Si $0\leqslant a\leqslant b$ alors $a^2\leqslant b^2$ car la fonction carrée est croissante sur les nombres positifs)
(Si $a\leqslant b\leqslant 0$ alors .... car la fonction carrée ....)

La condition $\left(\sqrt{x-4}\right)^2\geqslant 2^2$ donne $x-4\geqslant 4$ soit $x\geqslant 8$.

Comme $x\geqslant 8$ est compatible avec $x\geqslant 4$ on obtient donc $S=[8\,;+\infty[$.

Exercice n°27 page 157 :

1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ce qui rend le dénominateur rationnel (entier en fait).

2) Si $x>0$ alors $\sqrt{x}>0$ donc le nombre $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ existe bien.
En multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{x}$ on obtient une fraction égale à la précédente :

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\sqrt{x}}{x} \text{ donc par exemple } \frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5} .$$

Exercice n°36 page 158 :

1) Si $x>2$ alors x et 2 sont tous les deux positifs, donc (a) $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$ est correct.

2) Si $x \leqslant 3$ alors x peut aussi bien être positif que négatif, donc (c) on ne peut pas comparer $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{3}$.

Exercice 38 p 158 : Comparer $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$

Comme $0<\sqrt{3}\leqslant\sqrt{3}+1$ et que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{+}=\left[0;+\infty\right[$,

alors $\frac{1}{\sqrt{3}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}+1}$.

Autre exemple : Comparons $-\frac{\sqrt{5}}{2021}$ et $-\frac{\sqrt{8}}{2021}$

Comme $0\leqslant 5\leqslant 8$ alors $\sqrt{5}\leqslant\sqrt{8}$ car la fonction racine carrée est croissante

Donc $-\sqrt{5}\geqslant-\sqrt{8}$ en multipliant l'inégalité par -1.

Donc $-\frac{\sqrt{5}}{2021}\geqslant-\frac{\sqrt{8}}{2021}$ en multipliant par 2021.

Exercice n°39 page 158 :

a) $\frac{1}{x}=-1$ donne $x=\frac{1}{-1}=-1$

b) $\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$ donne $x=\frac{2}{3}$.

c) $\frac{1}{x}=\sqrt{2}$ donne $x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 43 page 158 :

Principe : $\frac{a}{b}=0$ si et seulement si : $a=0$ et $b\neq 0$

a) $\frac{x-1}{2x}=0$ est équivalent à $x-1=0$ et $x\neq 0$ ce qui donne $x=1$ comme unique solution.

b) $\frac{x+2}{x-4}=0$ est équivalent $x+2=0$ et $x-4\neq 0$ ce qui donne $x=-2$ comme seule solution.

c) $\frac{5x+3}{3x-4}=0$ si et seulement si $5x+3=0$ et $3x-4\neq 0$

donc ssi $5x=-3$ et $3x\neq 4$

donc ssi $x=-\frac{3}{5}$ et $x\neq \frac{4}{3}$

donc une seule solution : $S=\{-\frac{3}{5}\}$;

d) $\frac{x+7}{x-3}=\frac{3x+1}{x-3}$ est équivalent à $x+7=3x+1$ et $x\neq 3$

$x+7=3x+1$ donne $7=2x+1$ donc $2x=7-1=6$ soit $x=3$ ce qui est interdit.

Conclusion : $S=\emptyset$, il n'y a pas de solution.

Exercice n°48 page 159 :

1) $\frac{1}{x}\leqslant 4$ donne $x\geqslant \frac{1}{4}$, mais on peut aussi prendre tous les réels x négatifs.

Donc $S=\left]-\infty\,;0\right[\cup\left[\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$.

2) $\frac{1}{x}\geqslant 2$ donne non seulement $x\leqslant \frac{1}{2}$ mais oblige aussi x à être positif, donc $S=\left]0;\frac{1}{2}\right]$.

3) $\frac{1}{x}<-2$ donne $x>\frac{1}{-2}$ ou $x>-\frac{1}{2}$ **et** $x<0$ donc $S=\left]-\frac{1}{2};0\right[$.

Une erreur courante est de répondre $S=\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

4) $\frac{1}{x}>-\frac{1}{2}$ donne $x<-2$ **ou** $x>0$ donc $S=]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$.

5) $\frac{2}{2x-5}>-3$ donne $\frac{2x-5}{2}<-\frac{1}{3}$ (**ou** $2x-5>0$ qui donne $2x>5$ donc $x>\frac{5}{2}$)

$2x-5<-\frac{2}{3}$ donc $2x<-\frac{2}{3}+5$ et $2x<\frac{13}{3}$ soit $x<\frac{13}{6}$ soit $S=\left]-\infty;\frac{13}{6}\right[\cup\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$.