- Exercices sur la fonction carrée -

Exercice n° 11 page 124 :

1) Si x est l'abscisse du point A , alors son ordonnée est $y=x^2=2$.

Donc soit $x_A=-\sqrt{2}$, soit $x_A=\sqrt{2}$. Ici c'est donc $x_A=-\sqrt{2}$.

De même, on doit avoir $x_B{}^2=7$, donc soit $x_B=-\sqrt{7}$ soit $x_B=\sqrt{7}$. Donc $x_B=\sqrt{7}$.

L'écart entre ces deux abscisses est $d(x_A;x_B)=|x_A-x_B|=|-\sqrt{2}-\sqrt{7}|=\sqrt{2}+\sqrt{7}$.

2) Valeur calculatrice = 4.059965... Arrondi à 10^{-2} = 4.06

Exercice n° 12 page 124 :

La question se traduit mathématiquement ainsi :

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)^2$.
Résoudre les équations $f(x)=0$ puis $f(x)=4$ et $f(x)=10$.

- Antécédents de 0 par f :

L'équation $f(x)=0$ s'écrit $(x+1)^2=0$ donc nécessairement $x+1=0$ donc $x=-1$.

Donc 0 admet l'unique antécédent -1 par f , car seul $f(-1)=0$.

- Antécédents de 4 par f :

$f(x)=4$ s'écrit $(x+1)^2=4$ donc soit $x+1=-\sqrt{4}=-2$ et donc $x=-2-1=-3$
soit $x+1=\sqrt{4}=2$ et donc $x=2-1=1$

Donc 4 admet deux antécédents par f qui sont -3 et 1 : $f(-3)=f(1)=4$.

- Antécédents de 10 par f à déterminer vous-mêmes :

$f(x)=10$ s'écrit $(x+1)^2=10$ donc soit x+1=... et donc x=...
soit x+1=... et donc x=...

Exercice n° 24 page 125 : Equations du second degré particulières (pas générales)

On doit savoir résoudre une équation du second degré (qui comporte du x^2) qui peut se ramener sous la forme $x^2=a$, comme toutes celles qui suivent dans cet exercice.

a) $x^2+1=5$ donne $x^2+1-1=5-1$ donc $x^2=4$ qui donne $x=-\sqrt{4}=-2$ ou $x=\sqrt{4}=2$.

Donc $S=\{-2;2\}$.

b) $x^2+3=-2$ donne $x^2=-2-3=-5$ impossible car un carré est positif, donc $S=\emptyset$.

c) $2x^2-18=0$ donne $2x^2=18$ puis $x^2=9$ donc $x=-\sqrt{9}=-3$ ou $x=\sqrt{9}=3$,

Donc $S=\{-3;3\}$.

d) $3x^2+1=10$ donne $3x^2=9$ donc $x^2=3$ donc $S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$.

Exercice n° 25 page 125 :

a) $3x^2-5=x^2-1$ $3x^2-x^2=-1+5$ $2x^2=4$ $x^2=2$ donc soit $x=-\sqrt{2}$ soit $x=\sqrt{2}$ donc $S=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$	c) $\frac{x^2-2}{5}=1$ $x^2-1=1\times5=5$ $x^2=1+5=6$ donc soit $x=-\sqrt{6}$ soit $x=\sqrt{6}$ donc $S=\{-\sqrt{6};\sqrt{6}\}$
b) $-2x^2+6=3x^2$ $6=5x^2$ $x^2=\frac{6}{5}$ donc soit $x_1=\sqrt{\frac{6}{5}}$ soit $x_2=-\sqrt{\frac{6}{5}}$	d) $\frac{4x^2-1}{3}=5$ $4x^2-1=15$ $4x^2=16$ $x^2=4$ donc soit $x=-2$ soit $x=2$

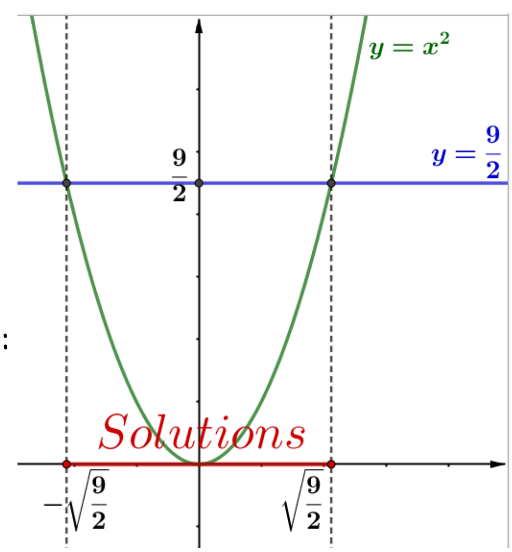
Exercice n° 36 page 127 :

1) $2x^2-3\leqslant6$

$2x^2\leqslant9$

$x^2\leqslant\frac{9}{2}$

Il faut visualiser l'intervalle solution sur un graphique :



On trace la parabole d'équation $y=x^2$.

On trace la droite horizontale d'équation $y=\frac{9}{2}$.

On lit les valeurs de x solutions sur l'axe des abscisses : les valeurs de x pour lesquelles la parabole est en-dessous de la droite ($x^2\leqslant\frac{9}{2}$).

On obtient $S=\left[-\sqrt{\frac{9}{2}};\sqrt{\frac{9}{2}}\right]$.

En utilisant $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ on peut transformer l'écriture du nombre $\sqrt{\frac{9}{2}}$:

$\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, on a ainsi rendu le dénominateur rationnel.

2) $-x^2+4<2$

$-x^2<2-4$

$-x^2<-2$

$-x^2\times(-1)>-2\times(-1)$ l'inégalité change de sens car on multiplie par un nombre négatif

$x^2>2$ puis on visualise l'ensemble des solutions graphiquement :

$S=]-\infty;-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2};+\infty[$.

3) $-7x^2+5\leqslant 2x^2-11$

$-9x^2\leqslant -16$

$9x^2\geqslant 16$ en multipliant par -1

$x^2\geqslant\frac{16}{9}$

$S=\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$.

4) $-5x^2+10>x^2-8$

$-6x^2>-18$

$x^2<\frac{18}{6}$

$x^2<3$

$S=]-\sqrt{3};\sqrt{3}[$.

Exercice n° 37 page 127 : Inéquations produits

Rappel de la mauvaise méthode pour résoudre une équation produit où l'on compare le produit à zéro (signe du produit) : Ne pas développer l'expression !

$(2x+3)(x-4)=2x^2-8x+3x-12=2x^2-5x-12$
comme il y a du x^2 **et** du x , on ne sait pas faire directement.

A résoudre en utilisant un tableau de signes :

a) $2x+3\geqslant 0$ donne $2x\geqslant -3$ puis $x\geqslant -\frac{3}{2}$ et donc $2x+3\leqslant 0$ donne $x\leqslant -\frac{3}{2}$

$x-4\geqslant 0$ donne $x\geqslant 4$ et donc $x-4\leqslant 0$ donne $x\leqslant 4$

x	$-\infty$		$-3/2$		4		$+\infty$
signes de $2x+3$		-	0	+		+	
signes de $x-4$		-		-	0	+	
signes de $(2x+3)(x-4)$		+	0	-	0	+	

Donc l'inéquation $(2x+3)(x-4)<0$ a pour solution $S=\left]-\frac{3}{2};4\right[$.

Exercice n° 47 page 128 :

1) $2x^2+3=-x^2+4$ donne $3x^2=1$ donc $x^2=\frac{1}{3}$

donc $x_1=-\sqrt{\frac{1}{3}}=-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Donc $S=\{\frac{1}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\}$.

2) $(x+2)^2=2x^2+4x$
$x^2+4x+4=2x^2+4x$
$4=x^2$ donc $S=\{-2;2\}$.

Exercice n° 49 page 128 :

1) L'inéquation $x^2+9x\geqslant 0$ se factorise ainsi: $x(x+9)\geqslant 0$.

On étudie ensuite le signe du produit $x(x+9)$ dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		-9		0		$+\infty$
x		-		-	0	+	
$x+9$		-	0	+		+	
$x(x+9)$		+	0	-	0	+	

On lit sur la dernière ligne que $x(x+9)\geqslant 0$ lorsque $x\in]-\infty;-9]\cup[0;+\infty[$

et on écrit $S=]-\infty;-9]\cup[0;+\infty[$.

2) L'inéquation $-x^2+2x<0$ se factorise ainsi: $x(-x+2)<0$.

On étudie ensuite le signe du produit $x(-x+2)$ dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$-x+2$		+		+	0	-	
$x(-x+2)$		-	0	+	0	-	

Donc $S=]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$.

3) Pour résoudre une inéquation comme $(x-2)^2\geqslant 81$:

On préfère comparer une expression à 0 plutôt qu'à 81 .
Cela revient à étudier le signe de l'expression.

On écrit donc l'inéquation de départ sous la forme: $(x-2)^2-81\geqslant 0$.

Si on développe, on obtient: $x^2-4x-77\geqslant 0$ qu'on ne sait pas résoudre !

Donc on essaye de factoriser l'expression, car on sait étudier le signe d'un produit.

Pour factoriser, deux techniques connues :

- soit il y a un facteur commun
- soit on peut utiliser une égalité remarquable

Comme il n'ya pas de facteur commun dans l'expression $(x-2)^2-81$, c'est qu'il faut utiliser une égalité remarquable.

$(x-2)^2-81=(x-2)^2-9^2$ ressemble à a^2-b^2 avec $a=x-2$ et $b=9$, ce qui donne :

$$(x-2)^2-81\geqslant 0$$

$$(x-2)^2-9^2\geqslant 0$$

$$(x-2+9)(x-2-9)\geqslant 0 \qquad a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$(x-7)(x-11)\geqslant 0$$

Il faut ensuite dresser le tableau des signes pour l'expression $(x-7)(x-11)$.

<u>Autre méthode</u> :

Résoudre $(x-2)^2\geqslant 81$ revient à résoudre $X^2\geqslant 81$ avec $X=x-2$.

Graphiquement, on voit qu'il faut que $X\leqslant -9$ ou $X\geqslant 9$.

Ce qui donne $x-2\leqslant -9$ et $x\leqslant -7$ ou $x-2\geqslant 9$ et $x\geqslant 11$.

Exercice n° 68 page 130 :

1 km = 1 000 m donc on multiplie par 1 000 la vitesse en km/h pour l'obtenir m/h

1 h = 3 600 s donc on divise par 3 600 la vitesse en m/h pour l'obtenir en m/s

Finalement, $V(m/s)=\dfrac{V(km/h)}{3{,}6}$.
Inversement, $V(km/h)=V(m/s)\times 3{,}6$.

Exemples : 36 km/h = 10 m/s et 1 m/s = 3,6 km/h

Un corps possède plusieurs types d'énergies :

- une énergie due à sa position, appelée énergie potentielle. Par exemple :
  une pierre placée à la hauteur h possède l'énergie potentielle $E_p=mgh$,
  avec $g=9{,}81\ m.s^{-1}$ l'accélération de la pesanteur et m la masse.
- une énergie due à sa vitesse : l'énergie cinétique $E_c=\dfrac{1}{2}mv^2$.
- une énergie due à sa masse : $E=mc^2$ où c est la vitesse de la lumière.

Principe en physique : L'énergie d'un système (isolé) se conserve au cours du temps.

Le programme Python qui utilise les deux fonctions :

```python
# exercice n° 68 page 130 sur l'énergie cinétique

def vitesse_en_ms(vitesse_en_kmh):
    return vitesse_en_kmh / 3.6

def energie_cintetique(masse, vitesse_en_kmh):
    return 1/2*masse*vitesse_en_ms(vitesse_en_kmh)**2

# programme principal
masse = 70
vitesse = 4
print(energie_cintetique(masse, vitesse))
```

Exercice n° 70 page 130 :

1) On trace la parabole d'équation $y=x^2$, et la droite d'équation $y=-2x+1$, puis on recherche les abscisses x des points d'intersection de la parabole avec la droite.

2 points intersection ici, donc 2 solutions qui sont $x\approx-2{,}4$ et $x\approx0{,}4$.

2) a) $(x+1)^2-2=x^2+2x+1-2=x^2+2x-1$ CQFD

b) L'équation $x^2=-2x+1$ équivaut à $x^2+2x-1=0$
équivaut à $(x+1)^2-2=0$
équivaut à $(x+1)^2=2$

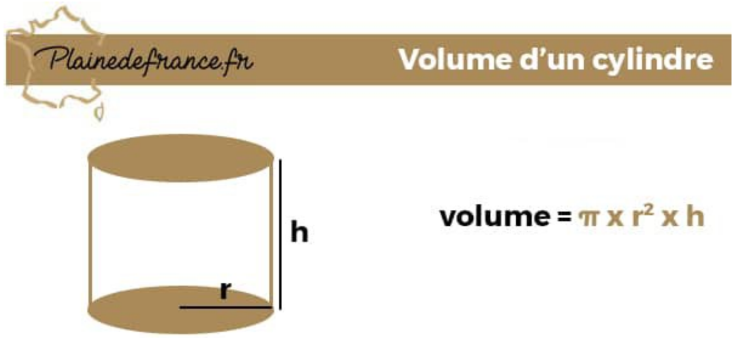
donc soit $x+1=\sqrt{2}$ et $x=-1+\sqrt{2}$
soit $x+1=-\sqrt{2}$ et $x=-1-\sqrt{2}$

Les solutions exactes sont $x_A=\sqrt{2}-1$ et $x_B=-\sqrt{2}-1$.

Quelques problèmes :

Exercice n° 12 page 124 :

Volume d'un cylindre: V = $B\times h$ = aire de la base $\times$ hauteur



1) On part de $2{,}3\leqslant R\leqslant 2{,}4$ et comme la fonction carrée est croissante entre deux nombres positifs, on a le droit de l'utiliser dans l'inégalité, ce qui donne :

$$2{,}3^2\leqslant R^2\leqslant 2{,}4^2 \text{ donc } 5{,}29\leqslant R^2\leqslant 5{,}76$$

2) Comme $V=\pi\times R^2\times h$ en multipliant l'inégalité précédente par $\pi h=\pi\times 10$ on obtient:

$$5{,}29\times 10\times\pi\leqslant\pi\times R^2\times h\leqslant 5{,}76\times 10\times\pi \text{ soit } 52{,}9\pi\leqslant V\leqslant 57{,}6$$

Pour avoir un encadrement du volume à 2 chiffres après la virgule, il suffit de prendre une valeur approchée de π à un seul chiffre après la virgule, soit $\pi\approx 3{,}1$.

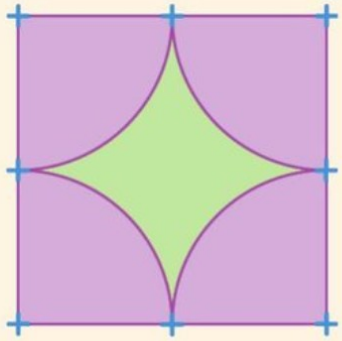
On obtient alors $163{,}99\leqslant V\leqslant 178{,}56$ en cm^3 puisque toutes les longueurs sont données en cm.

Question : Quelle est l'amplitude de cet intervalle ?

Comme 1 litre = 1 dm^3 = 0,001 cm^3 il suffit de diviser l'inégalité précédente par 1 000 pour avoir un encadrement du volume en litres :

$$0{,}163\ldots\leqslant V\leqslant 0{,}178\ldots \text{ donc } 0{,}16\ l\leqslant V\leqslant 0{,}18\ l$$

Exercice n° 17 page 124 :


PRISE D'INITIATIVE

Exprimer l'aire du motif vert en fonction de la longueur x du carré dans lequel il est inscrit.

L'aire du carré est $C=x^2$.

Les quatre quarts de disques de rayon x/2 forment en tout un disque complet d'aire:

$$A=\pi\times R^2=\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2=\pi\times\frac{x^2}{2^2}=\pi\times\frac{x^2}{4}=\frac{\pi\times x^2}{4}=\frac{\pi}{4}x^2$$

Aire de la partie en vert: C - A = ...

Exercice n° 26 page 125 :

On utilise l'égalité de Pythagore qui s'écrit: $GF^2=GE^2+EF^2$.

Et on en tire $GE^2=\ldots$

Exercice n° 27 page 126 :

On note $AF=x$ pour pouvoir repérer la position du point F sur le segment $[AB]$.
On doit donc nécessairement avoir $0\leqslant x\leqslant 4$.

Le point F est à égale distance des points S et T si et seulement si $FS=FT$.

Or $FS=FT$ implique que $FS^2=FT^2$.

Comme le triangle FAS est rectangle en A on a : $FS^2=FA^2+AS^2$.
On exprime ensuite FS^2 en fonction de x .

De même, on exprime FT^2 en fonction de x .

Ensuite, on essaye de résoudre l'équation en x obtenue lorsque $FS^2=FT^2$.

Exercice n° 29 page 126 :

Il faut faire un croquis, noter x la longueur à trouver, et chercher à obtenir une équation vérifiée par x , puis essayer de la résoudre.

Exercice n° 30 page 126 :

On note n le premier entier.
Le suivant est donc $n+1$.

Il faut donc trouver un entier n qui vérifie que $(n+1)^2-n^2=31$.

Execices sur la fonction cube

Exercice n° 18 page 125 :

1) On lit graphiquement environ 1.2

On peut calculer sa valeur exacte qui est $2^{\frac{1}{3}}=1{,}2599\ldots\approx 1{,}26$

2) Par symétrie de la courbe (car la fct cube est impaire) on a $(-2)^{\frac{1}{3}}=-2^{\frac{1}{3}}\approx 1{,}26$

Exercice n° 19 page 125 :

1) Pour démontrer que f est impaire, il faut prouver que $f(-x)=-f(x)$

Comme $f(x)=-2x^3$ alors $-f(x)=-(-2x^3)=2x^3$.

Et on a $f(-x)=-2(-x)^3=-2\times(-x^3)=2x^3$

On a donc bien $f(-x)=-f(x)$, ce qui montre que f est une fonction impaire.

2) La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

3) $f(200)+f(-200)=f(200)-f(200)=0$ car $f(-200)=-f(200)$

<u>Remarque</u> :

- De manière général, on aura $f(a)+f(-a)=0$ avec une fonction **impaire**.
- Avec une fonction **paire** g, on aurait $g(-x)=g(x)$, donc dans ce cas ce serait $g(a)-g(-a)=0$ pour tout antécédent a.

Exercice n° 21 page 125 :

1) $g(1)=1^3+1=1+1=2$ et $g(-1)=(-1)^3+1=-1+1=0$

2) Non car on n'a pas $g(-1)=-g(1)$

3) C'est un **contre-exemple**, car $g(-x)=-g(x)$ devrait fonctionner pour tous les réels x si g était impaire. Ici on montre un seul cas qui ne fonctionne pas, ce qui prouve que l'affirmation selon laquelle ça devrait toujours fonctionner est fausse.

Exercice n° 40 page 127 :

On trace la courbe de la fonction cube : $y=x^3$
On trace la droite horizontale qui passe par 1 : $y=1$
On regarde l'abscisse de l'unique point d'intersection qui vaut $x=1$

On observe qu'il faut que la courbe de la fonction cube, d'équation $y=x^3$, est en-dessous de la droite d'équation $y=1$ pour tout $x\leqslant 1$, ce qui donne $S=\left]-\infty;1\right]$.

L'inéquation $x^3<8$ a pour solutions $S=\left]-\infty;2\right[$
L'inéquation $x^3\geqslant 10$ a pour solutions $S=\left[10^{\frac{1}{3}};+\infty\right[$

Exercice n° 41 page 127 :

1) Factoriser c'est transformer une somme en produits.

$$x^3-4x=x(x^2-4)=x(x^2-2^2)=x(x+2)(x-2)$$

en utilisant l'égalité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
signe de x		-	|	-	0	+	|	+	
signe de $x+2$		-	0	+	|	+	|	+	
signe $x-2$		-	|	-	|	-	0	+	
signe $x(x+2)(x-2)=x^3-4x$		-	0	+	0	-	0		

Exercice n° 42 page 127 :

Grâce au tableau de signes précédent, on est capable de résoudre l'inéquation $x^3 - 4x \leqslant 0$ en lisant les signes dans la dernière ligne.

On obtient $S =]-\infty; -2] \cup [0;2]$.

Exercice n° 48 page 128 :

1) $x^3 + x = 0$ se factorise par $x(x^2+1) = 0$ donc, soit $x = 0$, soit $x^2+1 = 0$ (impossible) donc une seule solution $x = 0$, on écrit $S = \{0\}$.

2) $2x^3 - 3x = 0$ se factorise par $x(2x-3) = 0$ donc, soit $x = 0$, soit $2x - 3 = 0$ donc $S = \{0; \frac{3}{2}\}$.