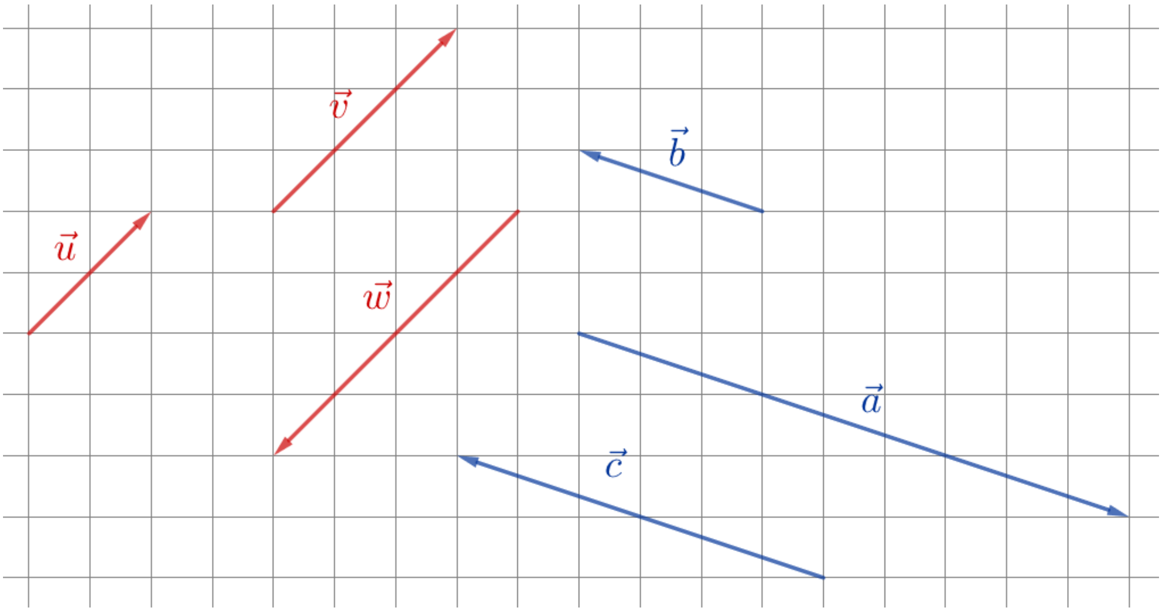
Correction partielle des exercices du cours sur les vecteurs colinéaires

Exercice n°1 : On donne le graphique suivant :



Les vecteurs rouges sont colinéaires entre eux :

$$\frac{1}{3} \times \vec{v} = \frac{1}{2} \times \vec{u} \text{ donc } \vec{v} = \frac{3}{2} \times \vec{u}$$

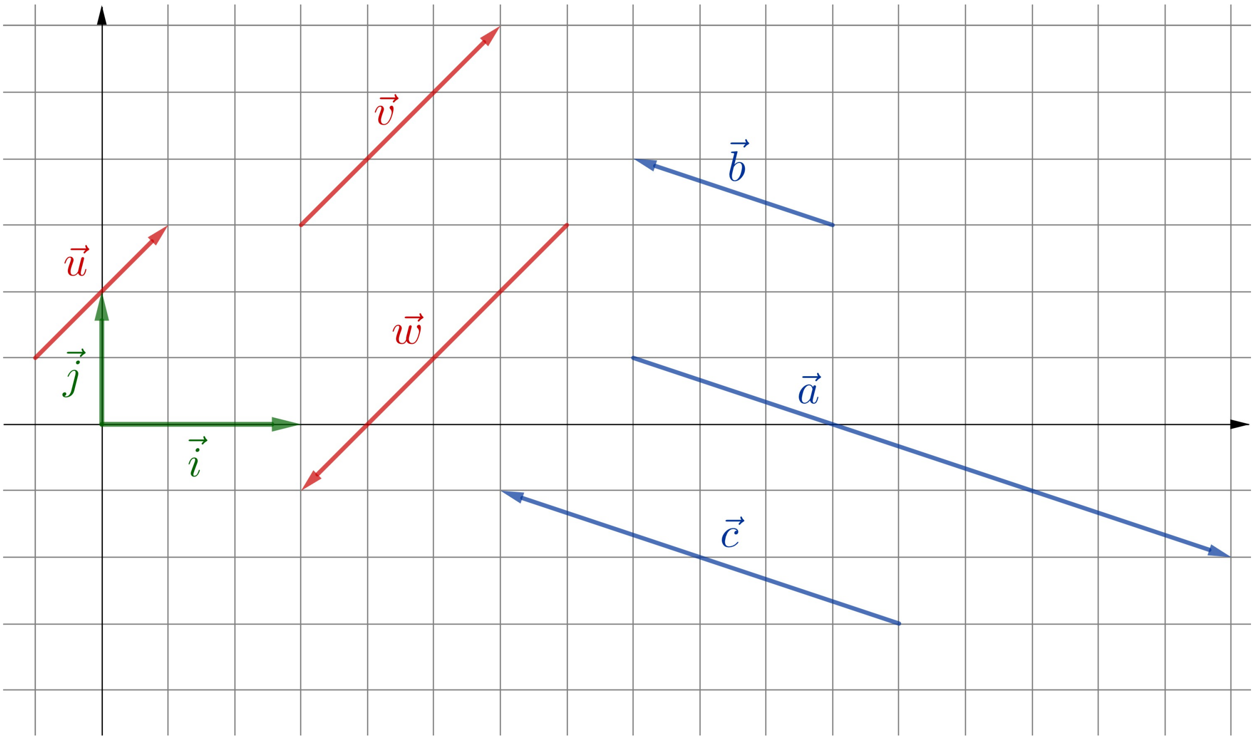
$$\frac{1}{4} \times \vec{w} = -\frac{1}{2} \times \vec{u} \text{ donc } \vec{w} = -\frac{4}{2} \times \times \vec{u} \text{ soit } \vec{w} = -2\,\vec{u}$$

Les vecteurs bleus sont colinéaires entre eux, mais pas avec les rouges !

$$\frac{1}{3} \times \vec{a} = -\vec{b} \text{ Donc } \vec{b} = -\frac{1}{3} \times \vec{a}$$

$$\frac{1}{2} \times \vec{c} = -\frac{1}{3} \times \vec{a} \text{ donc } \vec{c} = -\frac{2}{3} \times \vec{a}$$

Exercice n°2 : On donne le graphique suivant :



On peut écrire : $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{i}+\vec{j}$ donc les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}$ dans la base de vecteurs formées par $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

De même, $\vec{v}=\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}$ donc les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

On a aussi $\vec{w}=-\frac{4}{3}\vec{i}-2\vec{j}$ donc $\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-2\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$.

Puis $\vec{a}=3\vec{i}-\frac{3}{2}\vec{j}$ donc $\vec{a}\begin{pmatrix}3\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

$\vec{b}=-\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$ donc $\vec{b}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\vec{c}=-2\vec{i}+\vec{j}$ donc $\vec{c}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Exercice n°3 : Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Comme $1\times(-6)-2\times(-3)=-6+6=0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

On voit d'ailleurs facilement que $-3\times\vec{u}=\vec{v}$.

2) Pour $\vec{a}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}-10\\-15\end{pmatrix}$ on a $2\times(-15)-(-3)\times(-10)=-30-30=-60$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

3) Pour $\vec{c}\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, on a $8\times1-0\times4=8\neq0$ donc vecteurs non colinéaires.

4) Pour $\vec{f}\begin{pmatrix}15\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{g}\begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix}$ on a $15\times4-(-6)\times(-10)=60-60=-120\neq0$ donc non colinéaires.

Exercice n°4 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le réel k tel que $\vec{u}=k\,\vec{v}$.

En principe, il faut tout d'abord vérifier que les vecteurs sont bien colinéaires, sinon ce nombre k ne peut pas exister.

1) Pour $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ on écrit $-1\times k=2$ ou $2\times k=-4$,

ce qui permet de trouver $k=\dfrac{2}{-1}$ donc $k=-2$, et $\vec{u}=-2\times\vec{v}$.

2) Pour $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$ on écrit $6\times k=-3$ ou $-10\times k=-5$,

ce qui donne $k=\dfrac{-5}{-10}$ donc $k=-\dfrac{1}{2}$ et $\vec{u}=-\dfrac{1}{2}\vec{v}$.

Exercice n°5 : Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne les points suivants :

$A(-5;1)$, $B(0;3)$, $C(3;2)$, $D(8;4)$, $E(-7;-2)$ et $F(9;-1)$.

1) Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

2) Les droites (AC) et (EF) sont-elles parallèles ?

3) Les points C, D et E sont-ils alignés ?

4) Les points B, C et F sont-ils alignés ?

---

1) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Or on a $5\times2-2\times5=0$ donc ils sont bien colinéaires, donc les droites sont parallèles.

2) Même principe pour cette question.

3) Les points C, D et E sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-10\\-4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Or on a $5\times(-4)-2\times(-10)=-20+20=0$ donc les vecteurs sont colinéaires, donc les points sont alignés.

4) Même principe pour cette question.

Exercice n°6 : Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points suivants :

$A(3;0)$, $B(-1;2)$, $C(-3;-2)$ et $D(1;-4)$.

1) Démontrer que $ABCD$ est un carré.

2) Déterminer les coordonnées du point E symétrique de A par rapport à C.

3) Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

A quoi correspond ce point dans la figure ? Et pourquoi ?

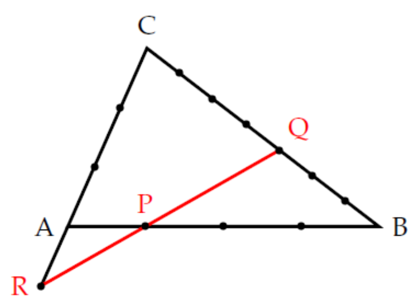
4) Déterminer les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$.

5) Démonter que les points B, C et F sont alignés.

La correction sera faite lorsque j'aurai plus de retours...

Exercice n°7 : Avec ou sans coordonnées, à vous de voir...

ABC est un triangle, P est un point de (AB), Q un point de (BC) et R un point de (CA) disposés comme sur le dessin. Les graduations sur les droites sont régulières. Démontrer que les points P, Q et R sont alignés.



Les points P, Q et R sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires.
Pour prouver cela, on peut soit utiliser des coordonnées, mais il faut un repère, soit démontrer directement que $\overrightarrow{PQ}=k\times\overrightarrow{PR}$.

Première méthode : Avec des coordonnées.

On choisit $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ comme repère par exemple, et on écrit les coordonnées des points P, Q et R dans ce repère, puis on détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ pour vérifier qu'ils sont bien colinéaires comme dans les exercices précédents.

> Écrire les coordonnées de tous les points de la figure pour vous entraîner, puis celles des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ et conclure.

Deuxième méthode :

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas colinéaires, ils forment une base, donc on exprime les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis on observe la multiplication qui fait passer de l'un à l'autre pour prouver que $\overrightarrow{PQ}=k\times\overrightarrow{PR}$ où l'on précisera la valeur du réel k.