Fiche d'exercices sur le pgcd.

Exercice n°1 :

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le pgcd des nombres suivants :

a) 144 et 840 b) 202 et 138 c) 441 et 777 d) 2004 et 9185

Exercice n°2 :

Déterminer tous les entiers naturels n inférieurs à 200 tels que : pgcd(n, 324) = 12

Exercice n°3 :

Déterminer sans calculs pgcd(10 000 ; 11 000)

Exercice n°4 :

A l'aide d'une combinaison linéaire, déterminer le pgcd des nombres suivants :
a) 51 et 150 b) 61 et 150

Exercice n°5 :

Si on divise 4294 et 3521 par un même entier positif, on obtient respectivement 10 et 11 comme reste. Quel est cet entier ?

Exercice n°6 :

n est un entier relatif quelconque. On pose :

$$A = n - 1 \quad \text{et} \quad B = n^2 - 3n + 6$$

1) a) Démontrer que le pgcd de A et de B est égal au pgcd de A et de 4.
b) Déterminer, selon les valeurs de l'entier n, le pgcd de A et de B.

2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, $n \neq 1$, $\dfrac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est-il un entier relatif ?

Exercice n°7 :

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $3n+7$ et $4n+9$ sont premiers entre eux.
b) Déterminer $pgcd(2n+1, 2n+3)$.
c) Montrer que la fraction $\dfrac{n}{n^2+1}$ est irréductible.

Exercice n°8 : Suites et pgcd.

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = v_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \ \text{ et } \ v_{n+1} = 2u_n + v_n$$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$

2) En déduire la valeur de pgcd(u_n, v_n).

Exercice n°9 :

1) n est un entier naturel , $a = 7n + 4$ et $b = 5n + 3$
   Montrer, pour tout n, que a et b sont premiers entre eux

2) Montrer que deux entiers naturels consécutifs non nuls sont premiers entre eux.

3) Prouver que la fraction $\dfrac{n}{2n+1}$ est irréductible pour tout entier naturel n.

Exercice n°10 :

Soit $k \in \mathbb{Z}$. On définit deux entiers a et b par $a = 4k + 5$ et $b = 7k + 9$.
Montrer que pour tout entier relatif k, les entiers a et b sont premiers entre eux.

Exercice n°11 :

Pour tout entier naturel, n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres :

$$a = n^3 - n^2 - 12n \quad \text{et} \quad b = 2n^2 - 7n - 4$$

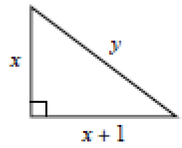
1) Démontrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisible par $n - 4$.
2) On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le pgcd(α, β).
   a) Trouver une relation entre α et β indépendante de n.
   b) Démontrer que d est un diviseur de 5.
   c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.

3) Démontrer que $2n + 1$ et n sont premier entre eux.

4) a) Déterminer, suivant les valeur de n et en fonction de n, le pgcd(a, b).
   b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Exercice n°12 :

On appelle triangle rectangle presque isocèle, le triangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur respectivement x et $x + 1$, et dont l'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des entiers naturels non nuls.



a) Montrer que x et y vérifient l'équation : $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.

b) Montrer que y est impair.

c) Montrer que x et y sont premiers entre eux.

Exercice n°13 :

Soit l'équation $4x - 3y = 2$.

a) Déterminer une solution particulière entière à cette équation.

b) Déterminer l'ensemble des solutions entières.

Exercice n°14 :

Soit l'équation $3x - 4y = 6$.

a) Déterminer une solution particulière entière à cette équation.

b) Déterminer l'ensemble des solutions entières.

Exercice n°15 :

Soit l'équation $5x + 8y = 2$.

a) Déterminer une solution particulière entière à cette équation.

b) Déterminer l'ensemble des solutions entières.

Exercice n°16 :

Soit l'équation $13x - 23y = 1$.

a) Déterminer une solution particulière entière à l'aide de l'algorithme d'Euclide à cette équation.

b) Déterminer l'ensemble des solutions entières.

Exercice n°17 :

1) Démontrer que pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2) On considère l'équation : (E) $87x + 31y = 2$

   a) Vérifier, à l'aide de la première question que 87 et 31 sont premiers entre eux.

   b) En déduire un couple $(u\ ,\ v)$ d'entiers relatifs tels que $87u + 31v = 1$ puis un couple $(x_0\ ,\ y_0)$ solution de (E).

   c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

3) **Application.** Trouver les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 10

Exercice n°18 :

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1) Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple $(u\ ;\ v)$ est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2) a) Déterminer un couple de relatifs $(x_0\ ,\ y_0)$ solution particulière de l'équation (E_2) :

$$35x - 27y = 1$$

b) En déduire une solution particulière $(u_0\ ;\ v_0)$ de (E_1).

c) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).

d) Déterminer la solution $(u\ ;\ v)$ permettant de déterminer J_1.

3) a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

b) Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.)

c) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

Exercice n°19 :

Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.
Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.

On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B

1) a) Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.

b) Recopier et compléter pointillés de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x\ ,\ y)$ possibles.

```
Variables : x, y  entiers
Traitement
  | pour x variant de 0 à . . . . .  faire
  |   | pour y variant de 0 à . . . . .  faire
  |   |   | si . . . . . . . .  alors
  |   |   |   | Afficher x et y
  |   |   | fin
  |   | fin
  | fin
```

2) Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.

3) a) Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

   b) Déterminer une telle solution.

   c) Résoudre l'équation (E) : $8x+15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

4) Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.
   Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.
   Calculer ces nombres.

Exercice n° 20 :

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

Théorème de Bézout :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de Gauss :
Soient a, b, c des entiers relatifs.
Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1) En utilisant le théorème de Bézout, démontrer le théorème de Gauss.

2) Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.
   Déduire du théorème de Gauss que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0\ [p]$ et $a \equiv 0\ [q]$, alors $a \equiv 0\ [pq]$.