Fiche d'exercices sur les matrices.

Produit de deux matrices

Exercice 1

Soit les matrices : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer les produits suivants : $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$
2) Que peut-on conclure ?

Exercice 2

Calculer, lorsque cela est possible, les produits de matrices suivants :

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 3

On donne la matrice : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$

Déterminer le réel x pour que : $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

Exercice 4

Voici les ventes d'une buvette lors d'un festival de musique ainsi que les prix pratiqués en euros.

Ventes	Sandwichs	Frites	Boissons
jour 1	70	110	225
jour 2	105	135	290
jour 3	65	90	185

Prix	€
Sandwidch	1,70
Frites	0,60
Boisson	0,20

Certains pratiquants du festival ont laissé entendre au gérant de la buvette qu'il pratique des prix trop élevés. En prévision du festival de l'année prochaine, le gérant estime qu'en baissant les prix de 20 %, il augmenterait ses ventes de 20 %. A t-il intérêt à baisser ses prix ?

Pour répondre à la question, on posera la matrice

- $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ où a_{ij} correspond aux ventes du produit j le jour i
- $\mathbf{P} = [p_{i1}]$ où p_{i1} correspond au prix de vente du produit i.

A l'aide de produits matricielles, on comparera les deux recettes.

EXERCICE 5

Une association de consommateurs compare les prix de cinq produits p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 distincts dans trois magasins différents. Les observations fournissent les données suivantes :

	Produit p_1	Produit p_2	Produit p_3	Produit p_4	Produit p_5
magasin 1	1	5	2	3	4
magasin 2	1,1	4,7	1,8	3,1	3,8
magasin 3	0,9	5,1	1,9	3,2	4

Pour comparer la dépense d'une ménagère selon les magasins, on considère un « panier » indiquant pour chaque produit la quantité achetée.
Les quantités correspondant aux 5 produits sont 2, 1, 3, 3, 2

A l'aide d'un calcul matriciel déterminer le prix du « panier » de la ménagère dans les trois magasins.

EXERCICE 6

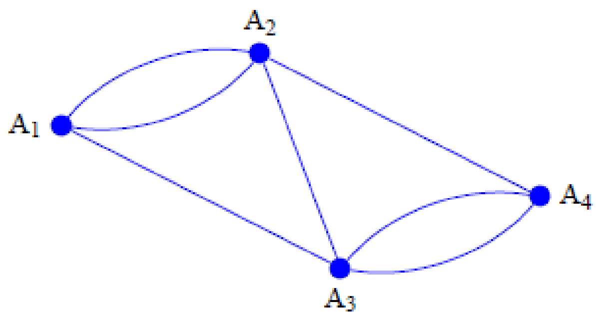
Trois élèves e_1, e_2 et e_3 ont quatre notes de mathématiques n_1, n_2, n_3 et n_4 au cours du premier trimestre . Les notes de e_1 sont dans l'ordre 8, 12, 16, 10 ; celle de e_2 sont 13, 15, 19, 14 et celles de e_3 sont 6, 8, 13, 9.

1) Écrire la matrice **A** dont le coefficient a_{ij} représente la note n_i de l'élève e_j. Quel est le format de la matrice **A** ?

2) Ces évaluations ont été notées sur 20. Les deux premières sont des interrogations écrites (coefficient 2), la troisième est un devoir maison (coefficient 1) et la quatrième est un contrôle (coefficient 3).
   Exprimer la matrice ligne **B** correspondant à la moyenne trimestrielle de mathématiques des élèves e_1, e_2 e_3 à l'aide d'une matrice coefficient **C** et de la matrice **A**.

EXERCICE 7

Les arêtes du graphe ci-contre représentent des pistes de ski de fond mesurant chacune 2 km. Les sommets de ce graphes sont les différents points d'accès à ce domaine skiable



1) Écrire la matrice **M** d'ordre 4 dont les coefficients m_{ij} représente le nombre de pistes reliant les accès A_i à A_j pour i et j entiers entre 1 et 4.

2) Calculer $\mathbf{M}^2$ et $\mathbf{M}^3$ à l'aide d'une calculatrice.

3) En déduire le nombre de circuits :
   a) de 4 km reliant A_2 et A_3 ;
   b) de 6 km reliant A_3 à lui-même ;
   c) d'au plus 6 km reliant A_1 et A_4.

Application aux systèmes

EXERCICE 8

Résoudre à l'aide d'un calcul matriciel les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -6x + 7y = -3 \\ 3x + 14y = -1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = -1 \\ \sqrt{8}x + \sqrt{27}y = 13 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x - 9y = 6 \\ x + 3y = \dfrac{7}{6} \end{cases}$

EXERCICE 9

Dans un repère du plan, on cherche à déterminer l'équation de la parabole, $y = ax^2+bx+c$, passant par les points :

$$P(1;4), \quad Q(-2;-5), \quad R(-1;0)$$

1) Traduire l'appartenance des ces trois points à la parabole par un système (S). En déduire l'écriture de ce système sous la forme matricielle $\mathbf{A\,X} = \mathbf{B}$.
2) Montrer à l'aide de votre calculatrice que la matrice : $\mathbf{C} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de $\mathbf{A}$.
3) Calculer alors les coefficients a, b et c

Matrice et suite

EXERCICE 10

On conserve dans une enceinte une population d'êtres unicellulaires qui ne peuvent se trouver que dans deux états physiologiques désignés par A et B. On désigne par a_n et b_n les effectifs - exprimés en milliers d'individus - des deux sous-populations (correspondant à chacun des deux états A et B) à l'instant n. Des observations menées sur une assez longue période permettent d'estimer que 95% des unicellulaires se trouvant à l'instant n dans l'état A n'ont pas changé d'état à l'instant $n + 1$, non plus que 80% de ceux se trouvant à l'instant n dans l'état B. L'effectif total s'élève à 500 000 individus. Cet effectif reste constant durant le temps.

1) **Écriture du système**. Traduire, avec des données, le système donnant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n
2) **Algorithme**. La population à l'instant 0 satisfait $a_0 = 375$. A l'aide d'un algorithme, faire le calcul des effectifs a_n et b_n pour une valeur de n donnée. Faire l'application numérique pour : $n = 15$, $n = 20$ et $n = 30$.

   Peut-on faire une conjecture sur le comportement des suite (a_n) et $b_n)$?

   Modifier l'algorithme pour qu'il effectue le calcul des effectifs a_n et b_n pour un effectif a_0 donné. Calculer a_{30} et b_{30} en prenant $a_0 = 450$ puis $a_0 = 50$.

   Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement des suites (a_n) et (b_n) et de leurs valeurs initiales ?
3) **Suite de matrice**. On pose $(\mathbf{U}_n)$ la suite de matrice colonne telle que : $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a) Traduire le système d'équation à l'aide d'une notation matricielle du type $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{U}_n$.

b) En déduire $\mathbf{U}_n$ en fonction de $\mathbf{U}_0$.

4) **Expression de $\mathbf{U}_n$.**

a) De la relation $a_n + b_n = 500$, déterminer les matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ telles que : $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{D}\mathbf{U}_n + \mathbf{E}$ où $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale et $\mathbf{E}$ une matrice colonne

b) Déterminer la matrice colonne $\mathbf{C}$ telle que : $\mathbf{C} = \mathbf{D}\mathbf{C} + \mathbf{E}$

c) On pose la suite de matrice $(\mathbf{X}_n)$ telle que : $\mathbf{X}_n = \mathbf{U}_n - \mathbf{C}$. Montrer que : $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{D}\mathbf{X}_n$.

d) En déduire alors $\mathbf{X}_n$ puis $\mathbf{U}_n$ en fonction de n, a_0 et b_0.

e) Montrer alors que $(\mathbf{U}_n)$ converge vers $\mathbf{C}$.

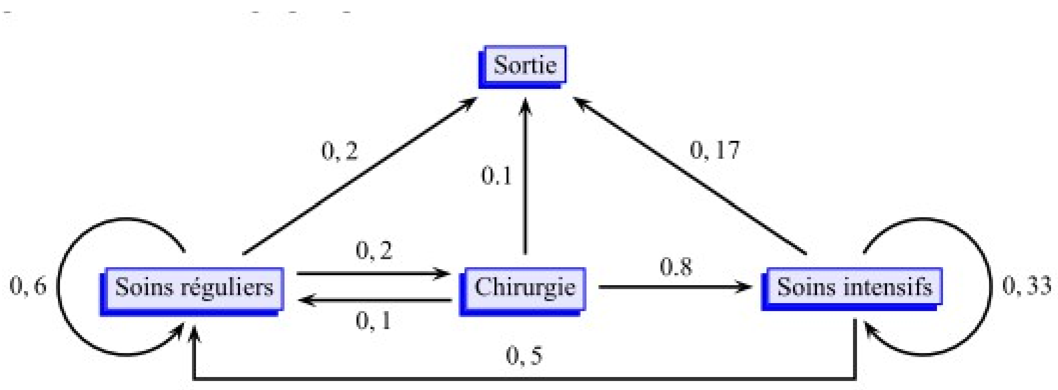
EXERCICE 11

On estime que les patients admis dans un certain service d'un hôpital peuvent se trouver dans l'un des 4 états suivants : 1. Soins réguliers, 2. Chirurgie, 3. Soins intensifs, 4. Sortie. Cette estimation est décrite par le tableau suivant, dans lequel sont indiquées les probabilités de passage d'un des états à un autre dans un intervalle de 24 heures (probabilités obtenues par modélisation des fréquences observées sur une longue période).

Tableau de circulation des malades entre les services :

	Soins réguliers	Chirurgie	Soins intensifs	Sortie
Soins réguliers	0,6	0,2	0	0,2
Chirurgie	0,1	0	0,8	0,1
Soins intensifs	0,5	0	0,33	0,17
Sortie	0	0	0	0

On peut tracer alors le graphe probabiliste suivant :



Les informations chiffrées précédentes peuvent être stockées sous la forme d'une matrice $\mathbf{M}$ (4×4) :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,8 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 0,33 & 0,17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Supposons qu'un certain jour n, la distribution des patients suivant les quatre états possibles s'écrive $\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Le lendemain $n+1$, la nouvelle distribution sera $\mathbf{X}_{n+1}$ tel que

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n \times \mathbf{M}$$

Ce qui donne :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,8 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 0,33 & 0,17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,7 & 2,4 & 6 & 3,9 \end{pmatrix}$$

Supposons qu'au jour 0, dix patients soient admis en soins réguliers et qu'il n'y ait aucun patient en cours de traitement. On note $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la répartition des malades le jour 0 et $\mathbf{X}_n$ la répartition des malades au n-ième jour, n entier positif.
Supposons également que 10 patients soient admis chaque jour en soins réguliers.

1) En utilisant la notation matricielle et votre calculatrice, déterminer la répartition des patients les jours 1 et 2 soit $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$.
2) Exprimer $\mathbf{X}_{n+1}$ en fonction de $\mathbf{X}_n$.
3) A l'aide d'un algorithme utilisant comme variables des matrices, déterminer la matrice $\mathbf{X}_n$ des répartitions pour un jour n donné. Faire l'application numérique pour les valeurs de n suivantes : $n = 15$, $n = 35$ et $n = 50$.

   Que constatez-vous ?
4) On admet que cette suite de matrice converge vers une répartition $\mathbf{X}$. Déterminer $\mathbf{X}$ à l'aide d'un calcul matriciel puis en donner une valeur approchée avec votre calculatrice et retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

Exercice 12

Pondichéry avril 2013

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.

Pour tout entier naturel n, on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation.

Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.

Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.

On admet que pour tout entier naturel n on a : $\left\{\begin{array}{lcl} j_{n+1} & = & 0,125 j_n + 0,525 a_n \\ a_{n+1} & = & 0,625 j_n + 0,625 a_n \end{array}\right.$

On introduit les matrices suivantes :

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{A} \times \mathbf{U}_n$.

   b) Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).

   c) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer $\mathbf{U}_n$ en fonction de $\mathbf{A}^n$ et de $\mathbf{U}_0$.

2) On introduit les matrices suivantes $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) On admet que la matrice $\mathbf{Q}$ est inversible et que $\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix}$.

   Montrer que : $\mathbf{Q} \times \mathbf{D} \times \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{A}$.

   b) Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul :

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{Q} \times \mathbf{D}^n \times \mathbf{Q}^{-1}$$

   c) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer $\mathbf{D}^n$ en fonction de n.

3) On admet que pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n & 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n & 0,7 + 0,3 \times (-0,25)^n \end{pmatrix}$$

   a) En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n et déterminer les limites de ces deux suites.

   b) Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?

Exercice 13

Polynésie juin 2013

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.
En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n-ième année après 2013, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n-ième année après 2013.
Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases}$.

On considère les matrices $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1) a) Déterminer $\mathbf{U}_1$.

   b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{M} \times \mathbf{U}_n + \mathbf{P}$.

2) On note $\mathbf{I}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer $(\mathbf{I} - \mathbf{M}) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   b) En déduire que la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{M}$ est inversible et préciser son inverse.

   c) Déterminer la matrice $\mathbf{U}$ telle que $\mathbf{U} = \mathbf{M} \times \mathbf{U} + \mathbf{P}$.

3) Pour tout entier naturel, on pose $\mathbf{V}_n = \mathbf{U}_n - \mathbf{U}$.

   a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{M} \times \mathbf{V}_n$.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{V}_n = \mathbf{M}^n \times \mathbf{V}_0$.

4) On admet que, pour tout entier naturel n,

$$\mathbf{V}_n = \begin{pmatrix} \dfrac{-100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ \dfrac{-50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

   a) Pour tout entier naturel n, exprimer $\mathbf{U}_n$ en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n).

   b) Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

Graphes probabilistes

EXERCICE 14

Pour se rendre à son travail, Robert rencontre une succession d'intersections de feux tricolores dont le fonctionnement est décrit ci-dessous.
A chaque intersection :

- Si le feu est vert, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,9 ou sera rouge avec la probabilité 0,05.
- Si le feu est orange, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,1 ou sera vert avec la probabilité 0,8.
- Si le feu est rouge, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,5 ou sera orange avec la probabilité 0,05.

n étant un entier naturel non nul, on note :

- V_n la probabilité que Robert rencontre un feu vert à la n-ième intersection,
- O_n la probabilité que Robert rencontre un feu orange à la n-ième intersection,
- R_n la probabilité que Robert rencontre un feu rouge à la n-ième intersection,
- $\mathbf{P}_n = (V_n \quad O_n \quad R_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste du n-ième feu tricolore.

1) a) Construire un graphe probabiliste pour décrire cette situation.
   b) Donner la matrice de transition $\mathbf{M}$ de ce graphe.
2) On suppose que le premier feu rencontré est vert.
   a) Donner la matrice ligne $\mathbf{P}_1$ de l'état initial puis calculer $\mathbf{P}_2$.
   b) Calculer $\mathbf{P}_3$ en détaillant les calculs effectués. Quelle est la probabilité que le 3^e feu soit vert ?
   c) Estimer l'état stable vers lequel tend le n-ième feu tricolore en calculant $\mathbf{P}_{20}$
3) Déterminer l'état stable vers lequel tend le n-ième feu tricolore à l'aide d'un système d'équations.
4) On suppose que le premier feu rencontré est rouge. Calculer $\mathbf{P}_{20}$. Qu'est-ce que cela signifie ?

Exercice 15

Trois chaînes de télévision A, B, C se partagent la diffusion de la coupe du monde de football. On suppose l'audience globale identique pour chaque match. Au début, elle est également répartie entre ces trois chaînes, mais d'un match au suivant, elle évolue de la façon suivante :

- 10 % des téléspectateurs de A passent sur B, 10 % sur C ;
- 20 % des téléspectateurs de B passent sur A, 10 % sur C ;
- 30 % des téléspectateurs de C passent sur A, 10 % sur B.

1) Représenter cette évolution par un graphe probabiliste, et déterminez la matrice de transition **T** (en rangeant les trois états dans l'ordre alphabétique).

2) Déterminez la répartition stable de probabilité $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.

3) On pose $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,25 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & -0,2 \\ 0,25 & -0,25 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Vérifiez que **M** et **N** sont inverses, puis que $\mathbf{T} = \mathbf{MDN}$.

   b) En déduire par récurrence que, pour tout naturel n, $\mathbf{T}^n = \mathbf{MD}^n\mathbf{N}$.

   c) Déterminer pour tout naturel n, $\mathbf{D}^n$

4) On note $\mathbf{P}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne indiquant la répartition de probabilité au n-ième match entre les chaînes A, B, C.

   a) Exprimez a_n, b_n, c_n en fonction de n.

   b) Quelle est la répartition de probabilité entre les trois chaînes au 30e match ? Vous donnerez les valeurs avec deux décimales.

   c) Déterminer et interprétez $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}_n$.

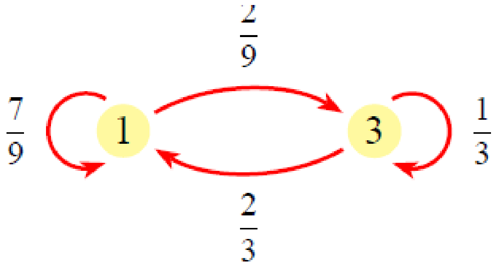
Exercice 17

Urnes d'Ehrenfest à trois boules

On dispose de deux urnes A et B. L'urne A contient trois boules numérotées 1, 2, 3. L'urne B est vide.
On choisit au hasard un numéro entre 1 et 3, et on change d'urne la boule correspondante.
On recommence n fois cette opération.

1) On note 0, 1, 2, 3 les quatre états possibles de l'urne A : 0 boule, 1 boule, 2 boules, 3 boules.
   a) Représenter par un arbre probabiliste l'évolution de l'urne A au cours des quatre premières étapes.
   b) Représenter par un graphe probabiliste l'évolution de l'urne A. Quelle est la matrice de transition ?
   c) Démontrer que la répartition stable de probabilité correspond à la loi binomiale $\mathscr{B}\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$.

2) On note p_n, la probabilité qu'il y ait trois boules dans l'urne A après n étapes.
   a) Démontrer que si n est impair, $p_n = 0$.
   b) Expliquer le graphe probabiliste ci-contre, qui décrit l'évolution du nombre de boules dans A entre l'étape $2k$ et l'étape $2k+2$ ($k \in \mathbb{N}$).



   c) En déduire que pour tout naturel k : $p_{2k+2} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{2}{9}(1 - p_n)$
   d) On pose $u_k = p_{2k}$ et $v_k = u_k - \dfrac{1}{4}$. Montrer que la suite (v_k) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. En déduire l'expression de v_k en fonction de k puis p_{2k} en fonction de k
   e) À l'aide de l'arbre de la question 1), vérifier cette formule pour $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$.

3) On appelle D la variable aléatoire qui indique le nombre d'étapes jusqu'au premier retour à l'état initial (trois boules dans A).
   a) Démontrer que, si n est impair, alors $P(D = n) = 0$.
   b) À l'aide de l'arbre de la question 1), déterminer $P(D = 2)$ et $P(D = 4)$.
   c) Quelle est la probabilité de revenir au moins une fois à l'état initial en moins de cinq étapes ?

Exercice 19

Chiffrement de Hill - Antilles sept 2013

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante (détaillée en quatre étapes) :

- **Étape 1** : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

  On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

- **Étape 2** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

  La matrice $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de codage.

- **Étape 3** : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} z_1 \equiv y_1\,(26) & \text{avec } 0 \leqslant z_1 \leqslant 25 \\ z_2 \equiv y_2\,(26) & \text{avec } 0 \leqslant z_2 \leqslant 25 \end{cases}$$

- **Étape 4** : $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple :

$$\text{RE} \to \begin{pmatrix}17\\4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}55\\93\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}3\\15\end{pmatrix} \to \text{DP}$$

Le bloc RE est donc codé en DP

1) Justifier le passage de $\begin{pmatrix}17\\4\end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix}55\\93\end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix}3\\15\end{pmatrix}$.

2) Soient $x_1,\ x_2,\ x'_1,\ x'_2$ quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$.

   a) Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 & \equiv & 3x'_1 + x'_2 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 & \equiv & 5x'_1 + 2x'_2 \quad (26). \end{cases}$

   b) En déduire que $x_1 \equiv x'_1\ (26)$ et $x_2 \equiv x'_2\ (26)$ puis que $x_1 = x'_1$ et $x_2 = x'_2$.

3) On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

   a) Vérifier que la matrice $\mathbf{C}' = \begin{pmatrix}2 & -1\\-5 & 3\end{pmatrix}$ est la matrice inverse de $\mathbf{C}$.

   b) Calculer $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\15\end{pmatrix}$.

   c) Calculer $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} x_1 & \equiv & y_1\ (26) & \text{avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 & \equiv & y_2\ (26) & \text{avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{cases}$

   d) Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer ?

4) Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.
On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 et z_2 les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.
Soient y'_1 et y'_2 tels que $\begin{pmatrix}y'_1\\y'_2\end{pmatrix} = \mathbf{C}'\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$ où $\mathbf{C}' = \begin{pmatrix}2 & -1\\-5 & 3\end{pmatrix}$.
Soient x_1 et x_2, les nombres entiers tels que : $\begin{cases} x_1 & \equiv & y'_1\ (26) & \text{avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 & \equiv & y'_2\ (26) & \text{avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{cases}$
Montrer que : $\begin{cases} 3x_1 + x_2 & \equiv & z_1\ (26) \\ 5x_1 + 2x_2 & \equiv & z_2\ (26). \end{cases}$
Conclure.

5) Décoder QC.

Exercice 20

Centres étrangers juin 2014

Partie A : préliminaires

1) a) Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :

$$n^2 \equiv N - 1 \quad \text{modulo } N.$$

Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \quad \text{modulo } N$.

b) Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$.
On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \leqslant k \leqslant 25$ et $5k \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$ vaut 21.

2) On donne les matrices : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice $6\mathbf{A} - \mathbf{A}^2$.

b) En déduire que $\mathbf{A}$ est inversible et que sa matrice inverse, notée $\mathbf{A}^{-1}$, peut s'écrire sous la forme $\mathbf{A}^{-1} = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{A}$, ou α et β sont deux réels que l'on déterminera.

c) Vérifier que : $\mathbf{B} = 5\mathbf{A}^{-1}$.

d) Démontrer que si $\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$, alors $5\mathbf{X} = \mathbf{BY}$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-après.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice $\mathbf{X}$ est transformée en la matrice $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$.

- La matrice $\mathbf{Y}$ est transformée en la matrice $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU » $\rightarrow \mathbf{X}\begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ « YE »

Partie C : procédure de décodage

Lors du codage, la matrice $\mathbf{X}$ est transformée en la matrice $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\,\mathbf{X}$.

1) Démontrer que : $\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$

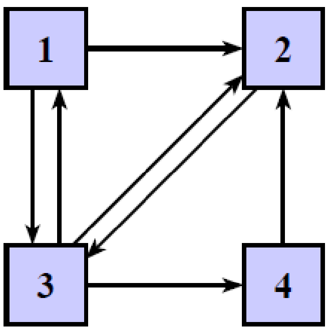
2) En utilisant la question 1b) de la **partie A**, établir que :

$$\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \end{cases} \quad \text{modulo } 26$$

3) Décoder le mot « QP ».

Exercice 24

Pertinence d'une page web - *Pagerank*



Une entreprise expérimente la mise en place d'un mini-réseau intranet pour son personnel. Pour l'instant, le réseau ne donne accès qu'à 4 pages numérotées 1, 2, 3 et 4. Ces pages comportent un ou plusieurs liens qui pointent chacun vers l'une des autres pages. L'organisation de cette « toile » miniature peut-être schématisée par le graphe ci-contre

1) Un employé entre sur le réseau par la page 4. Sur quelle(s) page(s) peut-il se rendre en un seul clic ? En exactement 2 clics ?

2) On suppose dorénavant qu'un employé distrait explore le réseau au hasard : une fois qu'il est entré par l'une des pages, il clique au hasard sur un des liens figurant sur cette page, et il continue sa navigation de la sorte, sans se préoccuper de son parcours antérieur.

   Écrire la matrice $\mathbf{T} = (t_{ij})$ de transition associée à ce graphe probabiliste. Quelle est la valeur du coefficient t_{32} ? À quelle probabilité correspond ce coefficient ?

3) a) À l'aide d'une calculatrice, calculer $\mathbf{T}^3$, $\mathbf{T}^4$ et $\mathbf{T}^8$. On donnera les coefficients en fraction (valeurs exactes)

   b) En déduire les probabilités qu'un employé se rende en cliquant au hasard :
   - de la page 2 à la page 3 en trois clics ;
   - de la page 3 à la page 4 en quatre clics ;
   - de la page 4 à la page 3 en huit clics.

4) On note Y_n, la variable aléatoire qui représente la page sur laquelle l'employé se trouve après n clics et $\mathbf{X}_n$ la matrice ligne représentant la loi de Y_n, c'est à dire :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} P(Y_n = 1) & P(Y_n = 2) & P(Y_n = 3) & P(Y_n = 4) \end{pmatrix}$$

a) On a admet que l'on a : $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n \times \mathbf{T}$. Exprimer $\mathbf{X}_n$ en fonction de $\mathbf{X}_0$ et de $\mathbf{T}$.

b) Calculer $\mathbf{X}_4$ lorsque $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) À l'aide de votre calculatrice, calculer $\mathbf{T}^{20}$. On donnera les coefficients avec une précision de 10^{-2}. Qu'observe-t-on ?

d) Vérifier que quelle que soit la matrice ligne $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}_n$ semble se stabiliser quand n devient grand autour de $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$.
Quel classement par indice de pertinence obtient-on pour les quatre pages ? Cet indice de pertinence est ce qu'on appelle le *Pagerank* dû à Larry Page l'un des fondateur de *Google*.

Exercices sur le calcul matriciel.

EXERCICE 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Quelle particularité a cette matrice ?
2. Calculer A^2, A^3 et A^4.
3. Émettre des conjectures sur A^n. Les démontrer.

EXERCICE 2 On considère une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que :

$$a_{ij} = 0 \text{ si } i \geqslant j \text{ et } a_{ij} = i + j \text{ si } i < j$$

1. Écrire la matrice A avec tous ces coefficients. Quelle particularité a cette matrice ?
2. Calculer A^2, A^3 et A^4.
3. En déduire A^n pour tout entier naturel non nul n.

EXERCICE 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On souhaite calculer A^n pour n entier naturel.

1. Calculer les premières puissances de A à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice. Quelle forme particulière remarque-t-on pour ces matrices ?
2. (a) Écrire A sous la forme $2B - I_3$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3 et B une matrice à préciser.
   (b) Montrer que $B^2 = 3B$.
   (c) En déduire A^2 en fonction de B et I_3, puis A^3.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $A^n = (-1)^n I_3 + \frac{1}{3}(5^n - (-1)^n)B$.
4. Écrire A^n avec tous ces coefficients en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}^*$

EXERCICE 4

On pose $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Exprimer A en fonction de I_2 et de N.
2. Calculer la matrice N^2 et en déduire, à partir de la question 1., une expression de A^2 en fonction de I_2 et de N.
3. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel k, $A^k = (-3)^k I_2 + k(-3)^{k-1}N$. Donner alors l'écriture de A^k.

EXERCICE 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer N^2 puis N^3.
   (b) Développer puis simplifier l' expression :
$$(I - N)(I + N + N^2)$$
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 6

On donne les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. Déterminer la matrice M^2. On donne :
$$M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$
2. Vérifier que : $M^3 = M^2 + 8 \cdot M + 6 \cdot I$
3. En déduire que M est inversible et que :
$$M^{-1} = \frac{1}{6} \cdot (M^2 - M - 8 \cdot I).$$

Partie B : Etude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ passe par les points :
$A(1;1)$; $B(-1;-1)$; $C(2;5)$

1. Démontrer que le problème à chercher trois entiers a, b et c tels que :
$$M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$
2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.